当代数学园地 8

测度值分枝过程引论

赵学雷 著

广东省高教厅科学研究出版基金资助

科学出版社

2000

内 容 简 介

本书简要地阐述近年来发展迅速的测度值分枝过程的基本理论，系统介绍超过程的几种构造、研究的思想方法以及超扩散过程在非线性偏微分方程中的应用．结合随机测度的几个特色问题，论述底过程、分枝率和分枝机制对超过程性质的联合作用．本书全面地介绍90年代国内外的最新研究成果，并附有相关领域的简要介绍．

本书可供大学数学、物理、生物等系的大学生、研究生、教师及有关的科技人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

测度值分枝过程引论/赵学雷著.
-北京：科学出版社，2000.1
(当代数学园地 8/姜伯驹主编)

ISBN 7-03-007422-X

Ⅰ.测… Ⅱ.赵… Ⅲ.测度(数学) Ⅳ.O174.12

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第07250号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717

新蕾印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

2000年1月第一版　　开本：850×1168 1/32
2000年1月第一次印刷　　印张：9 1/2
印数：1—2 000　　字数：243 000

定价：19.00元

序　言

测度值分枝过程是当前国际上的一个研究热点，国内从事该领域研究的人越来越多，进展很快，在国际上曾经出版过有关专著，例如，加拿大的D. A. Dawson在Lecture Notes in Mathematics上发表过长篇综合文章：Measure-Valued Markov Processes，1993；美国的E. B. Dynkin出版过一部著作：Introduction to Measure-Valued Branching Processes，1994. 它们是很好的学术参考书，但起点太高，很多结论没有证明，不适合入门之用，而且没有反映出近几年中国在该领域研究的最新成果. 一本既能满足国内初学者的需求，又能反映国内外一些最新研究成果的学术著作对该领域的发展是很有意义的. 赵学雷同志撰写的《测度值分枝过程引论》，主要分为两部分. 第一部分由前五章组成，论述测度值分枝过程，尤其是DW-超过程的基本理论，可供读者入门之用. 这一部分的内容包括预备知识、分枝马氏过程、测度值分枝过程与超过程构造（定义、构造、矩、增广超过程）、超过程的鞅特征（鞅性、随机积分、轨道连续性、占位时过程）、二分枝超过程的Le Gall构造等. 第二部分主要取材于作者及其合作者的研究成果，重点论题为超布朗运动（基本性质、半群性质、位势理论）、超过程的灭绝性（有限测度值超过程的灭绝性、缓增测度值超过程的局部灭绝性、超布朗运动灭绝点与灭绝时分布）、超对称稳定过程占位时的渐近行为、绝对连续性、超过程的过分函数与调和函数、超扩散与非线性偏微分方程等. 这些问题均是概率界普遍比较关注的，具有较大的理论意义及参考价值. 该书在对有关论题进行系统讨论的同时，还对国内外最新的相关研究进行评述，并重点介绍国内的研究成果. 最后，对目前较活跃的几个方面（具有交互作用的测度值分枝过程、FV-超过程、OU-超过程）做了简明扼要的介绍. 该书的写作由浅入深，逐

步引向一些高深理论.定理的证明力求采用较初等的理论与方法,并着重于研究方法与研究思想的总结.该书文字通顺,表达准确简练,逻辑性强,重点突出,整体结构编排合理.另外,这方面的学术著作国内还不曾有过,书中相当多的内容没有包含在以往国外同类出版物中.因此,在理论上具有先进性.该书对初学者可做为入门教材,对从事研究工作的人,也是该领域很好的学术参考书.

王梓坤

1997年10月

前　言

测度值分枝过程，狭义地称为(DW-)超过程，是国际上近十几年来概率论中的研究热点之一．它反映自然界中的一些非线性现象，如：人口的演化，分枝粒子系统等，又与非线性发展方程有密切联系．由于这类过程取值于测度空间，需要用无穷维分析的思想和方法，因而引起数学界的广泛关注，成为当今概率论最前沿的研究课题之一．我们知道，非线性问题和无穷维随机分析是国际上数学界共同关心的问题，我国也把这两个分支列为当今优先发展的学科．测度值分枝过程正是与这两个分支有着紧密联系的研究课题．

在撰写本书之前及在写作过程中，作者一直在思考为谁写这本书．早在作者学习测度值分枝过程并开始试图在该领域做些研究的时候，就常常因为没有一本系统的参考书而窘迫不已．现在作者教的学生也面临着同样的问题．目前国际上有一些长篇综述文章，几乎收录了 1992 年以前国际上的所有研究成果，是很好的参考资料，但起点较高，很多结果没有给出详细证明，初学者很难耐心地读下去．更重要的是它们没有反映出国内最近几年在测度值分枝过程方面的研究成果．于是写一本既可作为入门书，又兼顾重点介绍国内这方面研究成果的参考书就成了作者的写作初衷．

测度值分枝过程是建立在丰富而又高深的现代数学基础之上的，涉及大量的现代数学知识，写这样的一部反映研究前沿的学术著作，在篇幅有限的情况下，要想做到深入浅出就需要对有关材料进行取舍，在较少引入或承认已有结果的前提下努力使内容具有系统性和自封闭性．

事实上，在概率论的框架内，测度值分枝过程只不过是一类特殊的随机过程．因此，从已有的理论来看，掌握它并不困难．然而有意义的是考虑有关随机测度方面的问题．这就要求人们改变思考问题的方式，从而产生理解上的“不习惯”．因为人们习惯于把随机

过程看成在空间中运动的点，而对于测度值过程，必须把它想象成“一片云、一团雾”.从“一点”到“一片”，自然就会产生很多困惑.因此，本书在编排上，着眼于让读者快速入门，逐步进入高深的理论.

全书共分十二章.第一章给出一些预备知识，主要介绍几种测度距离空间、测度空间上概率测度簇胎紧性的几个判定准则和概率测度的收敛性.在第二章，给出分枝马氏过程的简单理论，重点论述分枝粒子系统的特征表现，为第三章引入测度值分枝过程做准备.第三章先从测度值分枝过程的一般定义出发，通过粒子系统给出超过程和增广超过程的构造，并着重研究超过程的矩性质.超过程鞅特征的系统论述是第四章的主要内容.因此有关的随机分析也是这一章讨论的主题.同时利用鞅性，研究了超过程的轨道连续性和超过程的占位时过程.在第五章，介绍二分枝超过程的“Brown 蛇”——Le Gall 轨道构造.第六章到第十章的内容主要取材于作者本人及国内其他同行近年来的研究成果.第六章研究超 Brown 运动，它是测度值分枝过程理论中的主要研究对象.它给出了超 Brown 运动半群的若干估计和超 Brown 运动的道中时的概率分布.并利用 Le Gall 的 Brown 蛇(Brownian snake)构造，考虑超 Brown 运动在首中空间曲面时的行为.第七章考虑超过程的灭绝问题.在分枝特征较一般的条件下，得到了超过程灭绝的判别准则和超过程的渐近性质.其结果充分展示了分枝特征对超过程性质的重要影响.绝对连续性是第八章讨论的主题.这一章从考察空间维数、分枝率对超过程绝对连续性的关系出发，研究了直线上超过程的绝对连续性、非分枝区域上的绝对连续性以及空间曲面上的绝对连续性.第九章针对超对称稳定过程，讨论其占位时的渐近行为.在较广泛的条件下，给出了上临界、下临界和临界情况下占位时过程的极限定理.第十章研究超过程的过分函数与调和函数.建立了超过程分份函数与底过程过分函数之间的对应关系，也给出了调和函数的一个分类定理.第十一章简明扼要地介绍了用超扩散过程表示非线性偏微分方程解的思想与方法.以此为依据，对超 Brown 运动进行模拟，旨在用 Monte-Carlo 方法，通过计算机模

拟一类非线性偏微分方程的边值问题. 在第十二章,简单介绍三种超过程:交互测度值分枝过程、FV-超过程和OU-超过程研究的进展情况.

感谢国家自然科学基金委数学天元基金、广东省高教厅科学研究出版基金的资助. 感谢王梓坤教授、吴荣教授多年来的指导与鼓励. 王梓坤教授在百忙中,抽出时间耐心地阅读了部分书稿,并提出了许多宝贵的修改意见. 陈木法教授多年来给予作者很多热情的鼓励和帮助,他的敬业精神值得作者认真学习. 感谢严士健、杨向群、戴永隆、李占柄、廖明、刘文、陈大岳等教授多年来的关怀与帮助. 感谢王永进、李增沪、张新生、陈雄、叶俊、罗守军、杨庆季、欧庆铃、鲍玉芳、郭军义、唐加山、任艳霞、洪文明、王国胜、杨敏、坚雄飞等同志有益的讨论. 特别地,王永进、李增沪、坚雄飞等同志仔细阅读了本书初稿,提出了许多中肯的改进意见,使本书的叙述更为严谨和完善. 科学出版社吕虹同志为本书的出版付出了辛勤劳动,在此谨致谢意.

由于新成果层出不穷,书中内容难免挂一漏万. 倘有谬误,欢迎读者不吝指正.

赵学雷

1997 年 6 月

目　录

第一章　预备知识及记号

为了方便读者，首先介绍一些基本知识. 由于篇幅所限，本章的部分结论将略去证明，有兴趣的读者可以参阅有关参考文献，如[60]和[19]等.

§1.1　基本空间

设(E,d)是一个距离空间. 令 $B(x,r):=\{y\in E;d(x,y)<r\}$，它是以 x 为中心 r 为半径的开球. 记 $\mathscr{E}$ 为由所有开球生成的 σ-代数(即 Borel 代数)，那么$(E,\mathscr{E})$是一个 Borel 可测空间. 以 $b\mathscr{B}(E)$ ($pb\mathscr{B}(E)$)记全体有界(相应地，非负有界)$\mathscr{E}$-可测函数 $f:E\to\mathbb{R}$ (相应地$\mathbb{R}_+=[0,\infty)$)组成的函数类. $\|f\|:=\sup_{x\in E}|f(x)|$. 以 $\mathscr{E}_c$ 记 $\mathscr{E}$ 中所有紧支集可测函数的全体. 以 $C(E)$，$C_c(E)$，$pC_c(E)$，$bC(E)$，$bpC(E)$等分别记为 E 上连续、紧支集连续、非负紧支集连续、有界连续、非负有界连续函数全体. 我们知道，$\mathscr{B}(E)$，$b\mathscr{B}(E)$，$C(E)$和 $bC(E)$等都是线性空间.

定义 1.1.1　称函数列$\{f_n\}\subset b\mathscr{B}(E)$**有界逐点收敛**到 $f\in b\mathscr{B}(E)$，若 $\sup_n\|f_n\|<+\infty$且 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，$x\in E$. 并记此为

$$\text{bp-}\lim_{n\to\infty}f_n=f. \tag{1.1.1}$$

一个集合 $F\subset b\mathscr{B}(E)$称为 bp-**封闭的**，若对任何$\{f_n\}\subset F$，$f\in b\mathscr{B}(E)$，而且(1.1.1)式成立，则必有 $f\in F$. $F\subset b\mathscr{B}(E)$的 bp-**闭包**定义为包含 F 的，在 $b\mathscr{B}(E)$中最小 bp-闭子集. 若 F 的 bp-闭包等于$b\mathscr{B}(E)$，则称 F 是 $b\mathscr{B}(E)$的 bp-**稠子集**.

引理 1.1.2　如果 $F\subset b\mathscr{B}(E)$是一个子空间，则 F 的 bp-闭包也是一个子空间.

证明 设 H 是 F 的 bp-闭包. 对于任一 $f\in H$, 定义

$$H_f = \{g \in H : af + bg \in H, \text{对于 } a,b \in \mathbb{R}\}. \quad (1.1.2)$$

由于 H 是闭的, 则 H_f 也为 bp-闭集. 显然有 $F\subset H_f\subset H$. 所以 $H_f=H$. 证毕. □

命题 1.1.3 $bC(E)$是$b\mathscr{B}(E)$的 bp-稠子集. 如果 E 是可分的, 则存在一列非负函数$\{f_n\}\subset bC(E)$, 使得$\{f_n\}$线性组合张成的子空间在 $b\mathscr{B}(E)$中是 bp-稠的.

证明 设 H 为 $bC(E)$的 bp-闭包. 由引理 1.1.2 知 H 是 $b\mathscr{B}(E)$的子空间. 注意到, 若 $G\subset E$ 是开集, $1_G\in H$. 所以由单调类定理(参见[214]), 可知 $H=b\mathscr{B}(E)$.

若 E 可分, 设$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$是 E 的稠子集. 对于任一可表示为有限个形如 $B(x_i,1/k)(i,k\geqslant1)$交的开集 $G\subset E$, 我们可选择一列非负有界连续函数$\{f_n^G\}$使得 bp-$\lim_{n\to\infty}f_n^G=1_G$. 易知$\{f_n^G, n, G$ 如上所定义$\}$是一个可数类, 且由函数型单调类定理知其扩张子空间是 $b\mathscr{B}(E)$.

若没有特别声明, 本书考虑的基本空间是 **Polish 空间**, 即拓扑同胚于某个紧距离空间的一个子集, 它是一个完备可分距离空间. 特别地, 若该空间是紧的, 则称为 **Luzin 空间**.

Polish 空间的单点紧化又可装备一个新距离, 使得在原来的任一紧集上这两个距离是等价的, 而且限制在原空间本身, 两种距离产生的 Borel σ-域是一样的. 这种性质给我们以后的讨论带来很多方便.

值得说明的是, 我们的研究是基于某一特定距离空间的, 但实际上我们将看到, 在以后的定义、结论中往往不直接依赖于具体的距离, 因此有时对空间的距离不做特别说明.

§1.2 测度空间

考虑可测空间$(E,\mathscr{E})$, 设 μ 是定义在此空间上的非负集函数(允许取正无穷值). 若 μ 是可数可加的, 即对于任何一组相互不

交的 $\mathscr{E}$-可测集合簇 $A_1,A_2,\cdots$，都有，

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i),$$

则称此集函数 μ 是可测空间 $(E,\mathscr{E})$ 上的**测度**. 称 $(E,\mathscr{E},\mu)$ 是**测度空间**.

若 $\mu(E)<\infty$，称 μ 为**有限测度**，并以 $M_F(E)$ 表示 E 上所有有限测度的全体. 特别地，若 $\mu(E)=1$ 称 μ 是概率测度，并记 E 上全体概率测度为 $M_1(E)$. 若存在一列 $\mathscr{E}$-可测集合 $K_1,K_2,\cdots,K_i,\cdots$ 满足 $\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i=E$ 而且 $\mu(K_i)<\infty(i=1,2,\cdots)$，则称 μ 为 **σ-有限测度**. 称在任何紧集上有限的测度为 **Radon 测度**，并记 E 上 Radon 测度的全体为 $M(E)$. 对于 $f\in b\mathscr{B}(E)$，$\mu\in M(E)$，令 $\langle\mu,f\rangle:=\mu(f):=\int_E f(x)\mu(dx)$.

定义1.2.1 函数集 $F\subset bC(E)$ 称为**分离 $M(E)$ 的**，若对于任何 $\mu,\nu\in M(E)$

$$\mu(f)=\nu(f),\ \forall\ f\in F, \tag{1.2.1}$$

则 $\mu=\nu$. 称 F 是**收敛决定类**. 如果 $\{\mu_n\}\subset M(E)$，$\mu\in M(E)$，

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(f)=\mu(f),\ \forall\ f\in F, \tag{1.2.2}$$

则 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$(其中 $\xrightarrow{w}$ 表示测度的弱收敛).

命题1.2.2 如果 (E,d) 是 Polish 空间，则我们可选 $V:=\{f_n\}_{n\in N}\subset pbC_c(E)$ 使之成为一个决定类.

证明 由命题1.1.3，可选 $\{f_n\}$ 且它的 bp-闭包是 $pb\mathscr{B}(E)$. 因 $\mu,\mu_n(n\geqslant 1)$ 都是 σ-可加测度，不妨均设为有限测度. 由控制收敛定理可得，$\lim_{n\to\infty}\mu_n(f)=\nu(f)$，$\forall\ f\in b\mathscr{B}(E)$. 此即 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$. □

在我们研究的问题中，常常考虑的是一些较小的测度空间. 下面是几个重要的测度空间.

1.2.1 Polish 空间上的有限测度空间

假设 (E,d) 是一个 Polish 空间，$(M_F(E),\tau_w)$ 表示 E 上的有限测度空间并赋予弱收敛拓扑，则 $(M_F(E),\tau_w)$ 也是一个 Polish 空

间. 为此，仅需说明此拓扑等价于 $M_F(E)$ 上某个距离所产生的拓扑. 记 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ 为命题1.2.2中给出的决定类. 为了以后方便起见，可把 f_n 规范化为 $f_n/\|f_n\|$，仍记为 $\{f_n\}_{n\geq 1}$，还是决定类. 令

$$d_w(\mu,\nu):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1\wedge|\mu(f_n)-\nu(f_n)|),\mu,\nu\in M_F(E).\qquad(1.2.3)$$

易证 d_w 定义了 $M_F(E)$ 上的一个距离，此距离产生的拓扑就是弱拓扑.

当然，我们还可以定义另一种距离，即 Prohorov 距离：

$$\varrho_M(\mu_0,\mu_1)=\max\{\varepsilon_0,\varepsilon_1\},\mu_0,\mu_1\in M_F(E),$$

其中 $\varepsilon_i=\inf_{\varepsilon>0}\{\varepsilon:\mu_i(F)<\mu_{i+1}(F^\varepsilon)+\varepsilon,F\subset E$ 是闭集$\}$, $i=0,1(2\equiv 0)$. $F^\varepsilon:=\{x\in E;\min_{y\in F}d(x,y)<\varepsilon\}$，即是 F 的 ε-邻域.

可以证明以上定义的两种距离是等价的(参见文献[60], Theorem 3.1).

1.2.2 Polish 空间上的概率测度空间

作为 $M_F(E)$ 的子集，概率测度空间 $M_1(E)$ 也是一个距离空间.

定义1.2.3 一个概率测度 $P\in M_1(E)$ 称为胎紧的，如果对于任意 $\varepsilon>0$，存在紧集 $K\subset E$，使得 $P(K)\geqslant 1-\varepsilon$. 一簇概率测度 $\mathscr{M}\subset M_1(E)$ 称为胎紧的，若对任意的 $\varepsilon>0$，存在一个紧集 $K\subset E$，使得

$$\inf_{P\in\mathscr{M}}P(K)\geqslant 1-\varepsilon.\qquad(1.2.4)$$

□

定义1.2.4 设 (E,d) 是 Polish 空间.

(1)任一 $P\in M_1(E)$ 是胎紧的.

(2)(**Prohorov 准则**)设 $\mathscr{M}$ 是一簇概率测度，下述结论等价：

(a) $\mathscr{M}$ 是胎紧的.

(b)任意 $\varepsilon>0$ 存在紧集 $K\subset E$ 使得

$$\inf_{P\in\mathscr{M}}P(K^\varepsilon)\geqslant 1-\varepsilon,\qquad(1.2.5)$$

其中 $K^\varepsilon:=\{x\in E;\inf_{y\in K}d(x,y)<\varepsilon\}$ 为 K 的 ε-邻域.

(c)$\mathscr{M}$ 是相对紧集.

特别地,若(E,d)是紧距离空间,则 $M_1(E)$也是紧距离空间.

证明 (1)设$\{x_k\}$在 E 中稠,$P\in M_1(E)$. 任给定 $\varepsilon>0$,选取整数 $N_1,N_2,\cdots$,使得

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{N_n}B\left(x_k,\frac{1}{n}\right)\right)\geqslant 1-\frac{\varepsilon}{2^n},\ n=1,2,\cdots. \qquad (1.2.6)$$

设 K 是集$\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k=1}^{N_n}B(x_k,1/n)$的闭包,则它是全有界的,因而是紧的,且

$$P(K)\geqslant 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}\geqslant 1-\varepsilon. \qquad (1.2.7)$$

(2)(a)⇒(b)显然. 现证(b)⇒(c). 由于 $\mathscr{M}$ 的闭包是完备的,因此只需证 $\mathscr{M}$ 的全有界性即可. 即要证,给定 $\delta>0$我们来构造一个有限集 $\mathscr{N}\subset M_1(E)$使得 $\mathscr{M}\subset\{Q:\rho_M(P,Q)<\delta$,对某 $P\in\mathscr{N}\}$. 其中 ρ_M 为 Prohorov 距离.

取$0\leqslant\varepsilon<\delta/2$及紧集 $K\subset E$ 使得(1.2.5)成立. 由 K 的紧性,存在有限集$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset K$ 使得 $K^\varepsilon\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_i$,其中 $B_i=B(x_i,2\varepsilon)$. 固定 $x_0\in E$ 和 $m\geqslant n/\varepsilon$,取 $\mathscr{N}$ 为如下形式的概率测度:

$$P=\sum_{i=0}^{n}\frac{k_i}{m}\delta_{x_i},\ 0\leqslant k_i\leqslant m,\ \sum_{i=0}^{n}k_i=m. \qquad (1.2.8)$$

给定 $Q\in\mathscr{M}$,令 $k_i=[mQ(E_i)](i=1,\cdots,n)$,这里 $E_i=B_i-\bigcup_{j=1}^{i-1}B_j$,$[\cdot]$表示最大整数部分,$k_0=m-\sum_{i=1}^{n}k_i$. 则对于由(1.2.8)式定义的 P,对所有闭集 $A\subset E$,

$$\begin{aligned}Q(A)&\leqslant Q\Big(\bigcup_{A\cap E_i\neq\varnothing}E_i\Big)+\varepsilon\\&\leqslant\sum_{A\cap E_i\neq\varnothing}\frac{[mQ(E_i)]}{m}+\frac{n}{m}+\varepsilon \qquad (1.2.9)\\&\leqslant P(A^{2\varepsilon})+2\varepsilon,\end{aligned}$$

所以 $\rho_M(P,Q)\leqslant 2\varepsilon<\delta$.

下面证(c)⇒(a). 设 $\varepsilon>0$. 由于 $\mathscr{M}$ 是全有界的,对每一 $n=1,2,\cdots$,存在有限子集 $\mathscr{N}_n\subset\mathscr{M}$ 使得 $\mathscr{M}\subset\{Q:\rho_M(P,Q)<\varepsilon/2^{n+1}$对某 $P\in\mathscr{N}_n\}$. 由结论(1)知,我们可以选取紧集 $K_n\subset E$,使得

$P(K_n)\geqslant 1-\varepsilon/2^{n+1}$对于所有 $P\in\mathscr{N}_n$ 成立. 给定 $Q\in\mathscr{M}$, 则有 $P_n\in\mathscr{N}_n$ 满足

$$Q(K_n^{\varepsilon/2^{n+1}})\geqslant P_n(K_n)-\varepsilon/2^{n+1}\geqslant 1-\varepsilon/2^{n+1}. \qquad (1.2.10)$$

取 K 为集 $\bigcap_{n\geqslant 1}K_n^{\varepsilon/2^{n+1}}$ 的闭包, 则 K 是紧集, 而且

$$Q(K)\geqslant 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=1-\varepsilon. \qquad (1.2.11)$$

若 E 是紧的, 其余结论显然. □

对于可数乘积空间, 我们有

命题1.2.5 设 $(E_k,d_k)(k=1,2,\cdots)$ 是一列距离空间. 令 $E:=\prod_{k=1}^{\infty}E_k, d(x,y):=\sum_{k=1}^{\infty}(d_k(x_k,y_k)\wedge 1)/2^k$, $x,y\in E$, 则 (E,d) 是距离空间. 设 $\{P_\alpha\}\subset M_1(E)$ (其中 α 取自于某个指标集), 而且对于 $k=1,2,\cdots$, 及每个 α, 定义 $P_\alpha^k\in M_1(E_k)$ 为 P_α 的第 k 个边缘分布, 即 $P_\alpha^k=P_\alpha\pi_k^{-1}$, 其中定义投影 $\pi_k: E\to E_k$ 为 $\pi_k(x)=x_k$. 则 $\{P_\alpha\}$ 是胎紧的当且仅当对每一 $k=1,2,\cdots$, $\{P_\alpha^k\}$ 是胎紧的.

证明 假设对每一个 $k=1,2,\cdots$, $\{P_\alpha^k\}$ 是胎紧的, 则对于 $\varepsilon>0$ 和任一 $k=1,2,\cdots$, 选取紧集 $K_k\subset E_k$ 使得 $\inf_\alpha P_\alpha^k(K_k)\geqslant 1-\varepsilon/2^k$. 则 $K:=\prod_{k=1}^{\infty}K_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}\pi_k^{-1}(K_k)$ 是紧的, 而且

$$P_\alpha(K)\geqslant 1-\sum_{k=1}^{\infty}(1-P_\alpha^k(K_k))\geqslant 1-\varepsilon \qquad (1.2.12)$$

对所有 α 成立. 因此 $\{P_\alpha\}$ 是胎紧的.

反过来, 我们仅需注意到对于任一紧集 $K\subset E$, $\pi_k(K)$ 也是 E_k 的紧集而且

$$\inf_\alpha P_\alpha^k(\pi_k(K))\geqslant \inf_\alpha P_\alpha(K), \ k=1,2,\cdots. \qquad (1.2.13)$$

证毕. □

1.2.3 紧距离空间上的测度空间

若 (E,d) 是紧的, $(M_F(E),d_w)$ 是局部紧的距离空间, 并可以紧化为 $\overline{M}_F(E)=M_F(E)\cup\{\infty_w\}$, 其中 $\{\infty_w\}$ 是一个孤立点. 其拓扑 τ_c 定义为 $\mu_n\to\mu\in M_F(E)$ 当且仅当 $\langle\mu_n,f\rangle\to\langle\mu,f\rangle$, $\forall f\in$

$C(E)$；$\mu_n\to\infty_w$ 当且仅当$\langle\mu_n,1\rangle\to\infty$. 为了定义一个距离与 τ_c 等价，首先令

$$d'_w(\mu,\nu):=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\wedge\left|\frac{1}{1+\mu(1+f_n)}-\frac{1}{1+\nu(1+f_n)}\right|, \tag{1.2.14}$$

$\mu,\nu\in M_F(E)$，其中$\{f_n\}_{n\in N}$为§1.2.1给出的规范决定类. 可证 $d'_w(\cdot,\cdot)$与 $d_w(\cdot,\cdot)$限制在任何有界测度集类上是等价的. 令

$$d_c(\mu,\nu)=\begin{cases}d'_w(\mu,\nu), & \text{如果 } \mu,\nu\in M_F(E);\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\wedge\frac{1}{1+\mu(1+f_n)}, & \text{如果 } \mu\in M_F(E),\nu=\infty_w;\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\wedge\frac{1}{1+\nu(1+f_n)}, & \text{如果 } \nu\in M_F(E),\mu=\infty_w.\end{cases} \tag{1.2.15}$$

容易验证，$d_c(\cdot,\cdot)$是一个距离，$(\overline{M}_F(E),\tau_c)$是一个紧距离空间. 我们称$(\overline{M}_F(E),\tau_c)$为 $M_F(E)$的 **Watanabe 紧化**.

1.2.4 局部紧距离空间上的 Radon 测度空间

若 E 是一个局部紧距离空间，其上的 Radon 测度空间 $M(E)$ 赋予淡收敛拓扑 τ_v：

$$\mu_n\xrightarrow{\tau_v}\mu \text{ 当且仅当} \langle\mu_n,f\rangle\to\langle\mu,f\rangle,\ \forall f\in C_c(E),$$

则$(M(E),\tau_v)$仍是一个 Polish 空间. 事实上，由命题1.2.2可选取决定类$\{f_n\}\in pC_c(E)$. 用与 d_w 完全相同的形式可给出$(M(E),\tau_v)$的一个距离 d_v.

我们知道，局部紧距离空间 E 可有如下的单点紧化：取 $\bar{E}=E\cup\{\infty_a\}$，$\{\infty_a\}$是孤立点，则$\{\mu\in M_F(\bar{E}):\mu(\infty_a)=0\}$可等同于 E 上的有限测度空间.

1.2.5 Polish 空间上的局部有限测度空间

令 $M_{LF}(E)$为所有在有界可测集上有限的测度全体. 令 τ_{LF}：

$\mu_n\xrightarrow{\tau_{LF}}\mu$当且仅当$\int f(x)\mu_n(dx)\to\int f(x)\mu(dx)$ ，$f\in bC_b(E)$，具有

界支集的有界连续函数全体. 同理可证$(M_{LF}(E),\tau_{LF})$也是一个Polish空间.

1.2.6 ρ-缓增测度空间

设$\rho: E\to\mathbb{R}_+$是严格正的连续函数,在E的距离下当x趋于∞时有$\rho(x)\to 0$. 设

$$M_\rho(E)\triangleq\left\{\mu\in M(E);\int_E\rho(x)\mu(dx)<\infty\right\}.$$

我们可以在$M_\rho(E)$上引入与前述相类似的拓扑. 注意到,$M_\rho(E)\to M_F(E)$,$\mu\to\mu'$:$\mu'(dx)=\rho(x)\mu(dx)$形成一一对应,由此生成$M_\rho(E)$上的一个使该映射为可测映射的最小拓扑,称为ρ-缓增拓扑,并记为τ_ρ. 在此拓扑下,一列$\{\mu_n\}\subset M_\rho(E)$收敛到$\mu\in M_\rho(E)$当且仅当$\mu'_n:=\rho\mu_n\xrightarrow{w}\mu'$. 那么$(M_\rho(E),\tau_\rho)$称为$\rho$-缓增测度空间.

特别地,当E为d-维欧氏空间$\mathbb{R}^d$,取$\rho(x):=\phi_p(x)=1/(1+|x|)^p$,$p>0$,记$M_\rho(E)$为$M_p(\mathbb{R}^d)$,其拓扑$\tau_p$定义为:$\mu_n\to\mu$当且仅当$\langle\mu_n,f\rangle\to\langle\mu,f\rangle$,$\forall f\in K_p(\mathbb{R}^d)$,这里$K_p(\mathbb{R}^d)=\{f:f=g+\alpha\phi_p,g\in C_c(\mathbb{R}^d),\alpha\in\mathbb{R}\}$. 那么$(M_p(\mathbb{R}^d),\tau_p)$为Polish空间. 事实上,取$\{f_n,n\geqslant 1\}$是$C_c(\mathbb{R}^d)$中的一个稠子集,$f_0=\phi_p$,那么$(M_p(\mathbb{R}^d),\tau_p)$上的一个等价距离为

$$d_p(\mu,\nu):=\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m}\left(1\wedge\left|\int_{\mathbb{R}^d}f_m d\mu-\int_{\mathbb{R}^d}f_m d\nu\right|\right),\tag{1.2.16}$$

$\mu,\nu\in M_p(\mathbb{R}^d)$. 拓扑$\tau_p$称为$p$-**缓增拓扑**. 相应地称$(M_p(\mathbb{R}^d),\tau_p)$为$p$-**缓增测度空间**. 容易验证,当$p>d$时$\mathbb{R}^d$上的Lebesgue测度属于$M_p(\mathbb{R}^d)$.

设$\dot{\mathbb{R}}^d:=\mathbb{R}^d\cup\{\infty_p\}$,其中$\infty_p$是孤立点. 把$\phi_p$延拓到$\dot{\mathbb{R}}^d$使$\dot{\phi}_p(\infty)=1$. 取$M_p(\dot{\mathbb{R}}^d)=\{\mu:\langle\mu,\dot{\phi}_p\rangle<\infty\}$,并赋于其p-淡收敛拓扑:$\mu_n\to\mu$当且仅当$\langle\mu_n,f\rangle\to\langle\mu,f\rangle$,$\forall f\in K_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$. 这时$M_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$是局部紧的,而且集合$\{\mu:\langle\mu,\dot{\phi}_p\rangle\leqslant k\}$,$\forall k>0$是紧的.

从上面的讨论，我们不难看到，ρ-缓增测度空间可在某种意义下与有限测度空间建立一一对应关系. 因此，有限测度空间将成为我们研究的出发点.

最后，我们给出函数类成为决定类的一个充分条件. 首先引人两个概念.

定义1.2.6 函数类 $F\subset bC(E)$ 称为**分离点的**，若对于任何 $x,y\in E, x\neq y$，存在 $h\in F$，使得 $h(x)\neq h(y)$. 进一步，称 F 为**强分离点的**. 若对于任一 $x\in E$ 及 $\delta>0$，存在有限个函数 $\{h_1,\cdots,h_k\}\subset F$，使得

$$\inf_{y;d(y,x)\geq\delta}\max_{1\leq i\leq k}|h_i(y)-h_i(x)|>0. \qquad (1.2.17)$$

显然，若 F 强分离点，则它也是分离点的.

定义1.2.7 设 (E,d) 是完备可分的；$F\subset bC(E)$ 为一个代数，即关于加法与乘法运算封闭.

(a)如果 F 分离点，则 F 是分离的.

(b)如果 F 强分离点，则它是收敛决定类.

证明 (a)只需对概率测度来证. 设 $P,Q\in M_1(E)$，使得 $P(f)=Q(f), f\in F$. 那么对于任何 $h\in H:=\{f+a: f\in F, a\in\mathbb{R}\}$ 有 $P(h)=Q(h)$，从而该等式对于任何属于 H 闭包(一致范数拓扑下)的 h 也成立. 任取 $g\in bC(E)$ 与 $\varepsilon>0$. 首先注意到 (E,d) 的可分性可导出任何概率测度的胎紧性，即存在紧集 $K\subset E$，使得 $P(K)>1-\varepsilon, Q(K)>1-\varepsilon$. 再由 Stone-Weierstrass 定理，存在一列 $\{g_n\}\subset H$，使得 $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in K}|g_n(x)-g(x)|=0$. 考虑

$$\begin{aligned}|P(ge^{-\varepsilon g^2})-Q(ge^{-\varepsilon g^2})|\leq&\left|\int_E ge^{-\varepsilon g^2}dP-\int_K ge^{-\varepsilon g^2}dP\right|\\&+\left|\int_K ge^{-\varepsilon g^2}dP-\int_K g_ne^{-\varepsilon g_n^2}dP\right|\\&+\left|\int_K g_ne^{-\varepsilon g_n^2}dP-\int_E g_ne^{-\varepsilon g_n^2}dP\right|\\&+\left|\int_E g_ne^{-\varepsilon g_n^2}dP-\int_E g_ne^{-\varepsilon g_n^2}dQ\right|\\&+\left|\int_E g_ne^{-\varepsilon g_n^2}dQ-\int_K g_ne^{-\varepsilon g_n^2}dQ\right|\end{aligned}$$

$$+ \left| \int_K g_n e^{-\varepsilon g_n^2} dQ - \int_K g e^{-\varepsilon g^2} dQ \right|$$

$$+ \left| \int_K g e^{-\varepsilon g^2} dQ - \int_E g e^{-\varepsilon g^2} dQ \right|. \qquad (1.2.18)$$

对于任一 n，因为 $g_n e^{-\varepsilon g_n^2}$ 在 H 的闭包中，上式右边的第四项是0. 第二项与第六项当 $n \to \infty$ 时趋于0. 这样(1.2.18)左端由 $4\gamma\varepsilon$ 控制，其中 $\gamma = \sup_{t \geq 0} t e^{-t^2}$. 令 $\varepsilon \to 0$，这就导出了 $P(g) = Q(g)$. 由于 $g \in bC(E)$ 是任意，而且 $bC(E)$ 是分离的，于是断言 $P = Q$.

(b) 设 $\{P_n\} \subset M_1(E)$ 及 $P \in M_1(E)$，满足 $\lim_{n \to \infty} P_n(f) = P(f)$，$f \in F$. 只需证明 $\{P_n\}$ 是相对紧的. 为此，任取 $f_1, \cdots, f_k \in F$，由于 F 是代数，故

$$\lim_{n \to \infty} \int g \circ (f_1, \cdots, f_k) dP_n = \int g \circ (f_1, \cdots, f_k) dP \qquad (1.2.19)$$

对于所有的 k 个变量的多项式 g 成立. 由稠密性，对于所有有界函数(1.2.19)式成立，这样我们有

$$P_n(f_1, \cdots, f_n)^{-1} \xrightarrow{w} P(f_1, \cdots, f_n)^{-1}, \ f_1, \cdots, f_n \in F.$$

$$(1.2.20)$$

设 $K \subset E$ 是紧集，$\delta > 0$. 对于任意的 $x \in E$，选择 $\{h_1^x, \cdots, h_{k(x)}^x\} \in F$ 满足

$$\varepsilon(x) := \inf_{y: d(y,x) > \delta} \max_{1 \leq i \leq k(x)} |h_i^x(y) - h_i^x(x)| > 0.$$

$$(1.2.21)$$

取 $G_x = \{y \in E: \max_{1 \leq i \leq k(x)} |h_i^x(y) - h_i^x(x)| < \varepsilon(x)\}$. 则 $K \subset \bigcup_{x \in K} G_x \subset K^\delta$. 由于 K 是紧集，存在 $x_1, \cdots, x_m \in K$，使得 $K \subset \bigcup_{l=1}^m G_{x_l} \subset K^\delta$. 定义 $g_1, \cdots, g_m \in bC(E)$，

$$g_l(x) = \max_{1 \leq i \leq k(x_l)} |h_i^{x_l}(x) - h_i^{x_l}(x_l)|, \qquad (1.2.22)$$

并注意到(1.2.20)，得

$$P_n(g_1, \cdots, g_m)^{-1} \xrightarrow{w} P(g_1, \cdots, g_m)^{-1}. \qquad (1.2.23)$$

于是

$$\liminf_{n \to \infty} P_n(K^\delta) \geq \liminf_{n \to \infty} P_n(\bigcup_{l=1}^m G_{x_l})$$

$$= \liminf_{n\to\infty} P_n\{x \in E: \min_{1\leqslant l\leqslant m}[g_l(x) - \varepsilon(x_l)] < 0\}$$

$$\geqslant P\{x \in E: \min_{1\leqslant l\leqslant m}[g_l(x) - \varepsilon(x_l)] < 0\}$$

$$= P(\bigcup_{l=1}^{m} G_{x_l}) \geqslant P(K). \qquad (1.2.24)$$

注意到 P 乃至 $\{P_n\}$ 中任意有限项的胎紧性，可知存在一个紧集 $K \subset E$ 使得 $\inf_n P_n(K^\delta) \geqslant 1-\delta$，即 $\{P_n\}$ 是相对紧的. □

§1.3 随机测度及 Laplace 泛函

设 (E,d) 是 Polish 空间，$(M_F(E),\tau_w)$ 如 §1.2.1所定义. 以 $\mathscr{M}=\mathscr{B}(M_F(E))$ 表示 $M_F(E)$ 的 Borel 子集类. 一个 $M_F(E)$ 上有限的随机变量诱导 $(M_F(E),\mathscr{M})$ 上的一个概率测度 P. 记 $M_1(M_F(E))$ 是 $M_F(E)$ 上所有概率测度全体.

引理1.3.1 (i)如果 $\mathscr{A}$ 是 E 的一个子集类，关于有限交封闭而且包含 E 的一个拓扑基，则

$$\mathscr{M} = \sigma\{f_A: A \in \mathscr{A}\},$$

其中 $f_A(\mu)=\mu(A)$，$\sigma\{f: f\in\mathscr{I}\}$ 表示使得所有映射

$$\mu: \to \mu(f), f \in \mathscr{I}$$

可测的极小 σ-域.

(ii)设 V 是如命题1.2.2所给出的决定类. 那么 $\mathscr{M}=\sigma\{\langle\cdot, f\rangle: f\in V\}$.

证明 (i)对于 $f\in bC(E)$，映射 $\mu\to\langle\mu,f\rangle$ 连续因而是 $\mathscr{M}$-可测的. 容易验证函数集 $\{f: \mu\to\langle\mu,f\rangle$ 关于 $\mathscr{M}$-可测$\}$ 在有界逐点收敛意义下封闭. 由于 $b\mathscr{B}(E)$ 是 $bC(E)$ 的有界逐点收敛闭包，这就表明对于任何的 $A\in\mathscr{A}$，$\mu\to\langle\mu,1_A\rangle$ 是 $\mathscr{M}$-可测的，因而 $\mathscr{M}\supset\sigma\{f_A: A\in\mathscr{A}\}$. 此外，对于每个形如 $f=\sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$，$A_i\in\mathscr{A}$，$a_i\in\mathbb{R}$，映射 $\mu\to\langle\mu,f\rangle$ 是 $\sigma\{f_A: A\in\mathscr{A}\}$-可测的. 由函数的单调类定理，上述形式的函数类在有界逐点收敛意义下其闭包包含 $bC(E)$. 即对于 $f\in bC(E)$，$\mu\to\langle\mu,f\rangle$ 是 $\sigma\{f_A: A\in\mathscr{A}\}$-可测的，从而 $\mathscr{M}\subset\sigma\{f_A: A\in\mathscr{A}\}$. (i)证毕.

(ii)仿(i)可证. □

引理1.3.2 设 $\mathscr{A}$, V 如引理1.3.1. 则 $(M_F(E),\mathscr{M})$ 上一个概率测度 X 可由"有限维分布" $\{P_{A_1,\cdots,A_n}: n\in N\} := \{X(A_1),\cdots,X(A_n): A_i\in\mathscr{A}, i=1,\cdots,n\}$ 唯一决定. 等价地, 也可由 $\{P_{f_1,\cdots,f_n}: n\in N\} := \{\langle X,f_1\rangle,\cdots,\langle X,f_n\rangle: f_i\in V, i=1,\cdots,n, n\in N\}$ 唯一决定.

证明 由引理1.3.1和 Kolmogorov 构造定理立得. □

定义1.3.3 设 P 是 $(M_F(E),\mathscr{M})$ 上的概率测度. 它的 Laplace 泛函定义为

$$L(f) := \int_{M_F(E)} e^{-\langle\mu,f\rangle} P(d\mu),\ f\in bp\mathscr{E}. \qquad (1.3.1)$$

容易证明 $L(\cdot)$ 是在有界逐点收敛意义下连续的.

若 V 如命题1.2.2中给出, 令 $\mathscr{V}\subset\mathscr{B}(M_F(E))$ 是 $\{F_f(\mu) := e^{-\mu(f)}; f\in V\}$ 的线性扩张. 我们有如下结论:

引理1.3.4 (i) $\mathscr{M}$-可测函数空间是 $\mathscr{V}$ 的有界逐点收敛闭包, 并且 $\mathscr{M}=\sigma\{F_f: f\in V\}$.

(ii) P 由 $L(f)$, $f\in V$ 唯一决定.

证明 (i) $\{\{\mu: \langle\mu,f_i\rangle\in O_i, i=1,\cdots,n\}: O_i$ 是 $\mathscr{R}$ 中的开集, $f_i\in V\}$ 构成 $M_F(E)$ 的一个邻域基. 注意到对于任何开集 O, 其特征函数 1_O 包含于 $\{\sum_{j=1}^n a_j e^{-jx}; n\in N, a_j$ 为有理数, $j=1,2,\cdots,n\}$ 线性组合的有界逐点收敛的闭包, 从而也属于 $\mathscr{V}$ 的有界线性闭包. 再由单调类定理即可得证.

(ii)由(i)可直接推出. □

定理1.3.5 (i) $\{F_f: f\in V\}$ 是 $M_1(M_F(E))$ 的一个收敛决定类, 即如果 $P_n, P\in M_1(M_F(E))$, $\forall f\in V$, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\int F_f(\mu)P_n(d\mu)\to\int F_f(\mu)P(d\mu),$$

则 $P_n \xrightarrow{w} P$.

(ii)存在一个可数严格正 $\mathscr{E}$-可测函数集 V' 使得对于任何的 $\{P_n\}\subset M_1(M_F(E))$, 如果 $\forall f\in V'$, 当 $n\to\infty$ 时有 $\int F_f(\mu)P_n(d\mu)$

$\to L(f)$，则存在一个次测度 $P \in M_{\leq 1}(M_F(E))$（即 $M_F(E)$ 上次概率测度的全体）使得 $L\{f\} = \int_{M_F(E)} F_f(\mu)P(d\mu)$，$\forall\ f \in V'$.

证明 (i)由于$\{F_f, f\in V\}$的线性扩张是一个代数，由定理1.2.7，我们仅需证它是强可分的，即对于任意 $\delta>0$及 μ 存在$\{F_{f_1}, \cdots, F_{f_N}\}$使得

$$\inf_{\nu\in B^c(\mu,\delta)} \max_{1\leq i\leq N} |F_{f_i}(\mu) - F_{f_i}(\nu)| > 0, \qquad (1.3.2)$$

其中 $B(\mu,\delta)$是以 μ 为中心以 δ 为半径（相对于距离 d_w）的球. 设 $\mu \in M_F(E)$，$\delta>0$. 并取$2^{-m}<\delta/4$. 如果 $d_w(\mu,\nu)>\delta$，则 $\sum_{i=1}^m |\langle\nu, f_i\rangle - \langle\mu, f_i\rangle| \geq \delta/2$，且有 $\max_{1\leq i\leq m} |\langle\nu, f_i\rangle - \langle\mu, f_i\rangle| \geq \delta/2m$. 但是 $\max_{1\leq i\leq m} |F_{f_i}(\nu) - F_{f_i}(\mu)| \geq \text{const } \delta$，其中的常数可以不依赖于 ν. 这就证明了$\{F_f\}$的强可分性，从而完成了(i)的证明.

(ii)可以选取 E 上的一个新距离使之成为紧距离空间且限制在 E 中保持 Borel 集不变. 选取 E 上严格正的可数多个函数集 V'，相对于新距离在连续函数空间中稠，从而它也是 $M_F(E)$的决定类. 注意到 E 是紧的时，可视序列中每一个 $P_n \in M_1(M_F(E))$ 为 $M_1(\overline{M_F(E)})$中的元素，其中$\overline{M_F(E)}$是 $M_F(E)$的紧化. 由于 $M_1(\overline{M_F(E)})$的紧性及 Laplace 泛函的连续性即可证明(ii). □

系1.3.6 假设 $P_n \in M_1(M_F(E))$. 如果

(1)$\{P_n\}$是胎紧的；

(2)对任何的 $f\in V$，当 $n\to\infty$时 $L_n(f) = \int F_f(\mu)P_n(d\mu)$收敛，

则 P_n 弱收敛于一个概率测度 P.

定义1.3.7 给定 $P\in M_1(M_F(E))$，我们定义 n-阶矩测度（若存在）$M_n \in M_1(E^n)$，$n\in \mathbb{N}$ 如下：

$$M_n(A_1 \times \cdots \times A_n) := \int_{M_F(E)} \mu(A_1)\cdots\mu(A_n)P(d\mu), \qquad (1.3.3)$$

$A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{B}$.

定义1.3.8 称 $M_F(E)$的子集 A 是胎紧的，如果

(1) $\sup_{\mu\in A}\mu(E)<\infty$;

(2) 对于 $\varepsilon>0$ 存在一个紧子集 $K_\varepsilon\subset E$ 使得 $\sup_{\mu\in A}\mu(K_\varepsilon^c)<\varepsilon$.

注1.3.9 与概率测度的胎紧性定义不同的是条件(1). 概率测度自然满足这个条件. 从定理1.2.4证明可知 Prohorov 准则对于一般的有限测度的胎紧情况也成立.

引理1.3.10 设 $\{P_n\}\subset M_1(M_F(E))$. 考虑一阶矩测度

$$M_{1,n}(B):=\int_{M_F(E)}\mu(B)P_n(d\mu),B\in\mathscr{E}.$$

如果 $\{M_{1,n}:n=1,2,\cdots\}$ 存在且在 $M_F(E)$ 中是胎紧的, 则 $\{P_n\}$ 在 $M_1(M_F(E))$ 中是胎紧的.

证明 令 $l:=\sup_n M_{1,n}(E)<\infty$. 对于 $m\in\mathbb{N}$, 存在紧集 K_m 使得 $\sup_n M_{1,n}(K_m^c)<1/2^m$. 取

$$C_m:=\{\mu:\mu(E)\leqslant 2^{m+1}l,\forall\ k\geqslant m+2,\mu(K_{2k}^c)\leqslant 2^{-k}\}. \tag{1.3.4}$$

易知 C_m 是紧的, 而且对于 $n\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}P_n(C_m^c)&\leqslant\frac{l}{2^{m+1}l}+\sum_{k=m+2}^{\infty}P_n(\{\mu:\mu(K_{2k}^c)>2^{-k}\})\\&\leqslant 2^{-(m+1)}+\sum_{k=m+2}^{\infty}2^k/2^{2k}=2^{-m}.\end{aligned}$$

从而 $\{P_n\}$ 是胎紧的.

定理1.3.11 (1) 设 $P\in M_1(M_F(E))$. 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}[M_n(E^n)]^{-1/2n}=+\infty, \tag{1.3.5}$$

则 P 可由它的各阶矩唯一决定.

(2) 设 $\{P_m:m\in\mathbb{N}\}\subset M_1(M_F(E))$ 及它们的各阶矩均存在. 如果对于每一 k, P_m 的 k-阶矩 $M_{k,m}$ 弱收敛于 E^k 上的一个有限测度 M_k, 且 $\sum_{k=1}^{\infty}[M_k(E^k)]^{-1/2k}=+\infty$, 则存在 $P\in M_1(M_F(E))$ 使得 P_m 弱收敛于 P, 其各阶矩为 $\{M_k\}$, 且 P 唯一.

证明 结论(2)由(1)易得, 而结论(1)的证明可参见文献[220]. □

§ 1.4　Poisson 从随机测度

定义1.4.1　称由如下 Laplace 泛函

$$L_\Gamma(\phi)=\exp\left(-\int_E(1-e^{-\phi(x)})\Gamma(dx)\right),\qquad(1.4.1)$$

$\phi\in bp\mathscr{E}$ 所决定的随机测度为具有强度 $\Gamma(\cdot)\in M_F(E)$**Poisson 随机测度**(Poisson random measure).

定义1.4.2　假设 E_1,E_2是 Polish 空间,Γ 为 E_1上有限测度.并设 $M_F(E_2)$上从律(cluster law)$\{P_x\}_{x\in E_1}$满足 $\int_{E_1}P_x\Gamma(dx)\in M_F(E_2)$.称由下式唯一决定的

$$L_{\Gamma,\{P_x\}}(\phi):=\exp\left(-\int_{E_1}(1-P_xe^{-\langle\cdot,\phi\rangle})\Gamma(dx)\right),\ \phi\in bp\mathscr{E}_2.$$

(1.4.2)

E_2上的随机测度为 **Poisson 从随机测度**(Poisson cluster random measure).

定义1.4.3　一个随机测度 X 称为是**无穷可分的**如果对于任一个整数 $n\geqslant1$,存在独立同分布的随机测度 $X_1,\cdots,X_n$ 使得 $X\overset{D}{=}X_1+\cdots+X_n$.

Poisson 随机测度与 Poisson 从随机测度都是无穷可分的.Poisson 从随机测度与无穷可分随机测度的标准表现有如下的密切关系.

定理1.4.4　设 X 是一个取值于 $M_{LF}(E)$的随机测度,它的无穷可分概率律为 P,则存在$(\gamma,N)\in M_{LF}(E)\times M(M_{LF}(E))$使得 $N(\{0\})=0,\int_{M_{LF}(E)}(1-e^{-\mu(A)})N(d\mu)<\infty,\forall\ A\in\mathscr{E}$有界.而且对于紧支集、有界非负函数 ϕ,

$$L(\phi)=E(e^{-\langle X,\phi\rangle})=e^{-u(\phi)},\qquad(1.4.3)$$

$u(\cdot)$表现为

$$u(\phi):=\langle\gamma,\phi\rangle+\int_{M_{LF}(E)}(1-e^{\langle\nu,\phi\rangle})N(d\nu). \qquad (1.4.4)$$

反之,任何这种形式的泛函是某个无穷可分测度的 Laplace 泛函.

证明 参见文献[104]. □

定义1.4.5 定理1.4.4中的分解称为**标准分解**,其中 N 称为**典范测度**.

下面我们进一步给出 Poisson 丛随机测度概念的一般化.

定义1.4.6 在定义1.4.2中若 Γ 是 E_1 上的随机测度,其分布为 $M_{LF}(E)$ 上的概率测度 P_I,那么所得 E_2 上随机测度的 Laplace 泛函为

$$L_{P_I,(P_x)}(\phi)=\int\exp\left(-\int_{E_1}(1-P_xe^{-\langle\cdot,\phi\rangle})\Gamma(dx)\right)P_I(d\Gamma), \qquad (1.4.5)$$

$\phi\in bp\mathscr{E}_2$具有界支撑. 称之为**随机强度为 P_I、丛律为 $\{P_x,x\in E_1\}$ 的 Cox 丛(或双重)随机测度**.

文献[104]在 Poisson 丛测度方面有详尽的论述,有兴趣的读者可参考该书.

§1.5 随机测度的结构

根据测度的 Radon 分解,任一个测度 $\mu\in M_F(E)$都可以唯一地分解为 $\mu=\mu_a(\mu)+\mu_d(\mu)$,其中 $\mu_a(\mu)$为纯原子测度,而 $\mu_d(\mu)$是一个扩散(非原子)测度. 即 $\mu_a=\sum a_j\delta_{x_j}$,而 $\mu_d(\{x\})=0,\forall x\in E$.

我们首先来考虑原子测度.

1.5.1 纯原子随机测度

记 ζ_a 为映射 $\mu\to\mu_a(\mu)$,纯原子测度的全体 $M_a:=\{\mu\in M_F(E):\mu=\zeta_a(\mu)\}$. 令 $\mathscr{D}_\infty=\{(a_1,a_2,\cdots):a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant 0,\ \sum a_i\leqslant$

1 }，及 $\mathscr{Q}_\infty=\{(a_1,a_2,\cdots):a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant 0,\ \sum a_i=1\}$. 定义映射 $\theta:\mu\to\theta(\mu):M_1(E)\to\tilde{\mathscr{Q}}_\infty$，$\theta(\mu)$ 等于原子测度 $\zeta_a(\mu)$ 中按原子质量下降顺序排列而得到的向量，并记 $|\theta(\mu)|\leqslant\infty$ 为其中非零原子的个数. 若 $\mu_a=\sum_{i=1}^{|\theta(\mu)|}a_i\delta_{x_i}$，$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots$，再定义 $\bar\theta(\mu):=(\theta(\mu);x_1,\cdots,x_{|\theta(\mu)|})$. 显然 $\mu\in M_a(E)\cap M_1(E)$ 当且仅当 $\theta(\zeta_a(\mu))\in\mathscr{Q}_\infty$.

定义1.5.1 假定 E 是一个可分空间. 称 $\{E_j^n,x_j^n,\rho_n;n,j\in\mathbb{N}\}$ 为 **E 的分割簇**，如果

(a) 固定 n，$\{E_j^n;j\in\mathbb{N}\}$ 是 E 的一个分割，即 $E_j^n\in\mathscr{E}$，$x_j^n\in E_j^n$，$E_j^n\cap E_k^n=\varnothing$，$j\neq k$ 而且 $\bigcup_j E_j^n=E$.

(b) $\{E_j^{n+1}:j\in\mathbb{N}\}$ 是 $\{E_j^n:j\in\mathbb{N}\}$ 之加细，也即是每个 E_j^{n-1} 必定是某个 E_k^n 的子集.

(c) 当 $n\to\infty$，$\rho_n:=\sup_j\mathrm{diam}(E_j^n)\to 0$. 其中 $\mathrm{diam}(A):=\sup(d(x,y);x,y\in A)$，$A\in\mathscr{E}$.

给定分割簇 $\{E_j^n,x_j^n,\rho_n;n,j\in\mathbb{N}\}$，定义映射 $\xi_n:M_F(E)\to M_F(E)$ 如下

$$\xi_n(\mu):=\sum_j\mu(E_j^n)\delta_{x_j^n}.\tag{1.5.1}$$

若进一步给定 $\eta>1$，定义 $\zeta_{\eta,n}:M_F(E)\to M_F(E)$：

$$\zeta_{\eta,n}(\mu):=\sum_j(\mu(E_j^n))^\eta\delta_{x_j^n}.\tag{1.5.2}$$

定理1.5.2

(a) $\zeta_a(\mu)=\lim_{\eta\downarrow 1}\lim_{n\to\infty}\zeta_{\eta,n}(\mu)$.

(b) 映射 $\mu\to\mu_a$ 是 $\mathscr{B}(M_F(E))/\mathscr{B}(M_F(E))$ 可测的.

(c) $M_a(E):=\{\mu:\mu(E)=\zeta_a(\mu)(E)\}\in\mathscr{B}(M_F(E))$.

(d) 映射 $\bar\theta:M_1(E)\to\tilde{\mathscr{Q}}_\infty\times\bigcup_{i=0}^\infty E^i$ 是可测的.

证明 证明概要

(a) 容易验证当 $\mu=\sum a_i\delta_{y_i}$ 时，有

$$\lim_{\eta\downarrow 1}\lim_{n\to\infty}\zeta_{\eta,n}(\mu)=\mu.\tag{1.5.3}$$

另一方面，如果 μ 是扩散的，那么

$$\lim_{\eta\downarrow 1}\lim_{n\to\infty}\zeta_{\eta,n}(\mu)=0.\tag{1.5.4}$$

(b)由映射 $\mu\to\mu(E_j^n)$ 的可测性知映射 $\{\zeta_{\gamma,n}\}$ 是可测的. 从而推出 ζ_a 是可测的.

(c)由定义显然.

(d)对于 $n\in N$, 设 π_n 表示 $\{1,2,\cdots\}$ 的置换, 使得

$$\pi_n j<\pi_n i, \text{若 } \mu(E_j^n)>\mu(E_i^n),$$

$$\pi_n j<\pi_n i, \text{若 } \mu(E_j^n)=\mu(E_i^n) \text{ 且 } j<i.$$

取 $\bar\theta(\mu):=(\{\mu(E_j^n)\},\{x_j^n\})$. 显然 $\mu(E^n_{\pi_n^{-1}j})\to a_j$ 且 x_j 是有限集序列 $(x^n_{\pi_n^{-1}k}:a_k=a_j)$. □

现在让我们把这种技巧应用到一类 Cox 随机测度中去. 假设 $x\to P_x$ 是 $E_1\to M_1(M_F(E_2))$ 的可测映射, I 是 E_1 上的随机测度, X 为 $E_1\times E_2$ 上的随机测度. 假定 (I,X) 的联合概率分布律为 $P\in M_1(M_F(E_1)\times M_F(E_1\times E_2))$, 在给定 I 的条件下, X 是一个强度为 I, 从分布为 $E_1\times E_2$ 上 $\delta_x\times P_x$ 的 Poisson 从随机测度. 直观上, 我们可以分两步去认识 X 的构成. 首先选定 E_1 上一个点集然后对应于每点一个"丛". 下面的结果允许我们用这种方法去分解测度.

设 $\mathscr{G}_0:=\sigma\{1_{(0,\infty)}(X(A\times E_2)):A\in\mathscr{E}_1\}$, $\mathscr{G}_1=\sigma\{I(A):A\in\mathscr{E}_1\}$, 选取适当修正的条件期望 $E(X|\mathscr{G}_0\vee\mathscr{G}_1)$ 使其几乎处处成为一个 E 上的随机测度. 由定理1.5.2(c), $A=\{I:I$ 是非原子的$\}\in\mathscr{G}_1$.

定义1.5.3 设 X 是 E_2 上一个 Cox 从随机测度, 其随机强度为 E_1 上的 I, 从律为 $\{P_x:x\in E_1\}$. 令 $\{A_i^n,x_i^n,\rho_n:n,i\in N\}$ 是 E_1 的分割簇且 $\rho_n=1/n$, 则

(a)在 A 上 P-a.s.

$$E(X|\mathscr{G}_0\vee\mathscr{G}_1)=\int\delta_x\times\left(\int\mu P_x(d\mu)\right)\widetilde{X}(dx),$$

且

$$E(e^{-\langle X,\phi\rangle}|\mathscr{G}_0\vee\mathscr{G}_1)$$

$$=\exp\left(\int\log\left(\int e^{-\int\phi(x,y)\mu(dy)}P_x(d\mu)\right)\widetilde{X}(dx)\right),$$

$\phi\in pb(\mathscr{E}_1\times\mathscr{E}_2)$. 其中 $\widetilde{X}$ 是一个 E_1 上随机测度, 满足对任何开集

G,

$$\tilde{X}(G) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} 1(A_i^n \subset G)1_{(0,\infty)}(X(A_i^n \times E_2)).$$

(b)如果 I 是 a.s. 非原子的,那么在条件 I 下,$\tilde{X}$ 是 E_1 上强度为 I 的 Poisson 随机测度.

证明 参见文献[33]中的附录第三节. □

1.5.2 Lebesgue 分解与绝对连续的随机测度

设 E 是 Polish 空间,X 是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取$(M_F(E),\mathscr{B}(M_F(E)))$值的随机测度. 设 $\nu\in M_F(E)$,对于每一 $\omega\in\Omega$, $X(\omega)$相对于 ν 的 Lebesgue 分解记为 $X(\omega)=X_{ac}^{\nu}(\omega)+X_s^{\nu}(\omega)$,其中 $X_{ac}^{\nu}(\omega)\ll\nu$(绝对连续部分),$X_s^{\nu}(\omega)\perp\nu$(奇异部分).

引理1.5.4 $\omega\to X_{ac}^{\nu}(\omega)$ 及 $\omega\to X_s^{\nu}(\omega)$是$(\Omega,\mathscr{F})$到$(M_F(E),\mathscr{B}(M_F(E)))$的可测映射. 即 $X_{ac}^{\nu}(\omega)$及 $X_s^{\nu}(\omega)$均是随机测度.

证明(参见文献[15]) 先给出映射 $\mu\to\mu_{ac}^{\nu}$关于 $\mathscr{B}(M_F(E))\to\mathscr{B}(M_F(E))$可测的一个大致证明. 先证

$$N:=\{(\mu_1,\mu_2):\mu_1\ll\nu,\mu_2\perp\nu\}$$

是 $M_F(E)\times M_F(E)$的一个可测子集(参见[14],定理2.1.3). 注意到映射 $\psi:M_F(E)\times M_F(E)\to M_F(E);\psi(\mu,\gamma)=\mu+\gamma$ 是连续的,再由 Lebesgue 分解的唯一性,ψ 与 N 一一对应. 由于 $M_F(E)$是 Polish 空间,由 Kuratowski 定理(参见[153],p.15)知任一 N 的可测子集在 ψ 之下的像集也是可测的. 从而,对于 $B\in\mathscr{B}$,$\psi(N\cap\{(\mu_1,\mu_2):\mu_1(B)<a\})\in\mathscr{B}(M_F(E))$. 这即证明了所要结论.

引理1.5.5 设 X 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取值于 $M_F(\mathbb{R}^d)$的随机测度. 假定

(i)存在 Lebesgue 零测度的可测子集 $N\subset\mathbb{R}^d$ 使得对于每一个 $z\in\mathbb{R}^d\setminus N$ 都有序列 $\epsilon_n\to0(n\to\infty)$以及当 $n\to\infty$时有 $X(B(z,\epsilon_n))/\epsilon_n^d$ 依分布收敛于随变量 $\eta(z)$且 $E(\eta(z))<\infty$.

(ii)

$$E(\langle X,\phi\rangle)=\int_{\mathbb{R}^d\setminus N}E(\eta(z))\phi(z)dz,\ \forall\ \phi\in bC(\mathbb{R}^d),\tag{1.5.5}$$

则 X 几乎处处是$\mathbb{R}^d$ 上的绝对连续测度.

证明 由引理1.5.4知 X 的绝对连续部分 X_{ac}(相对于 Lebesgue 测度)及奇异部分 X_s 都是可测的. 进一步,对于固定的 ω,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X(B(z,\varepsilon_n))}{\varepsilon_n^d}=\lim_{n\to\infty}\frac{X_{ac}(B(z,\varepsilon_n))}{\varepsilon_n^d}=\eta_{ac}(\omega,z) \qquad (1.5.6)$$

关于 $z\in\mathbb{R}^d\setminus N(\omega)$存在,其中 $N(\omega)$是$\mathbb{R}^d$ 中一个 Lebesgue 零测集, $\eta_{ac}(\omega,z)$为 $X_{ac}(\omega)$相对于 Lebesgue 测度的 Radon-Nikodym 导数的修正. 易知 $\eta_{ac}:\Omega\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}_+$是$(\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$-可测的,式(1.5.6)相对于乘积测度 $P(d\omega)dz$ 几乎处处成立. 特别地,对于几乎所有的 z,关系式(1.5.6)是分布意义下成立的,从而由假设(i)我们可断言对几乎所有的 $z\in\mathbb{R}^d$, $\eta_{ac}(\cdot,z)$ 与 $\eta(z)$ 同分布. 因此由(1.5.5),

$$\begin{aligned}&\int_{M_F(\mathbb{R}^d)}P(d\omega)\int_{\mathbb{R}^d}\phi(z)X_{ac}(\omega,dz)\\&=\int_{M_F(\mathbb{R}^d)}P(d\omega)\int_{\mathbb{R}^d}\phi(z)\eta_{ac}(\omega,z)dz\\&=\int_{M_F(\mathbb{R}^d)}P(d\omega)\int_{\mathbb{R}^d}\phi(z)X(\omega,dz),\ \forall\ \phi\in pbC(\mathbb{R}^d).\end{aligned}$$

再由事实 $X_{ac}(\omega)\leqslant X(\omega)$, $\omega\in\Omega$,推出 $X=X_{ac}$, P-a.s.. □

§1.6 马氏转移核与 Laplace 泛函

设(E,d)是一个紧距离空间. 我们知道$(M_F(E),\mathscr{M})$是一个局部紧可分距离空间且可以用§1.2.3的方式紧化. 设 ρ 是$M_F(E)$上的完备距离,$C_0(M_F(E))$表示 $M_F(E)$上无穷远处趋于零的连续函数的全体.

现在我们希望能够定义转移概率为 $\mathscr{P}(s,t,\mu,d\nu)$,取值于 $M_F(E)$的非时间齐次马氏过程. $M_F(E)$上的转移函数 $\mathscr{P}$ 可根据 Laplace 泛函

$$L(s,t,\mu;\phi)=\int e^{-\langle\nu,\phi\rangle}\mathscr{P}(s,t,\mu;d\nu),\ \phi\in bp\mathcal{E},\quad (1.6.1)$$

来刻画：

(i) 对于固定的 $s,t,\mu,\phi\to L(s,t,\mu;\phi)$ 是 E 上随机测度的 Laplace 泛函.

(ii) 对于每一个 $\phi\in bp\mathscr{E},\mu\to L(s,t,\mu;\phi)$ 是 $\mathscr{M}$-可测的.

(iii) $L(s,t,\mu;\phi)=\int\mathscr{P}(s,u,\mu;d\nu)L(u,t,\nu;\phi),s<u<t.$

在时间齐次的情况下，转移函数具有如下形式

$$\mathscr{P}(t,\mu;d\nu)=\mathscr{P}(s,s+t,\mu;d\nu).$$

相应 $b\mathscr{B}(M_F(E))$ 上的压缩半群定义为

$$T_tG(\mu):=\int G(\nu)\mathscr{P}(t,\mu;d\nu),\ G\in b\mathscr{B}(M_F(E)).$$

定义1.6.1 称 T_t 是 **Feller** 半群，如果 $T_t:C_0(M_F(E))\to C_0(M_F(E))$ 且当 $t\to 0$ 时，有 $\|T_tG-G\|\to 0,\forall\ G\in C_0(M_F(E))$.

引理1.6.2 转移函数 $\mathscr{P}(t,\mu;d\nu)$ 对应于 $C_0(M_F(E))$ 上一个 Feller 半群的充分必要条件是

(i) 对于固定的 $t>0$，从 $M_F(E)$ 到 $M_1(M_F(E))$ 的映射 $\mu\to\mathscr{P}(t,\mu;\cdot)$ 是连续的，或等价地对于任一 $\phi\in V$（V 是一个决定类），

$$\mu\to L(t,\mu,\phi):=\int e^{-\langle\nu,\phi\rangle}\mathscr{P}(t,\mu;d\nu)$$

是连续的.

(ii) $\lim_{\mu\to\Delta}\mathscr{P}(t,\mu;\cdot)=\delta_\Delta$, i. e. $\lim_{\mu\to\Delta}L(t,\mu,1)=0,\forall\ t\geq 0$. 其中 Δ 是 $M_F(E)$ 单点紧化的孤立点.

(iii) 映射 $t\to\mathscr{P}(t,\mu;\cdot)$ 在0点是一致随机连续的，即对于任一 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{t\downarrow 0}\sup_{\mu}(1-\mathscr{P}(t,\mu;N_\varepsilon(\mu)))=0,$$

其中 $N_\varepsilon(\mu):=\{\nu:d_w(\mu,\nu)<\varepsilon\}$.

证明 由文献[37]的引理2.6易得. □

引理1.6.3 在引理1.6.2(i)、(ii)下，条件(iii)等价于更弱的条件：

$$\lim_{t\downarrow 0}\mathscr{P}(t,\mu;\ \cdot)=\delta_\mu,$$

或等价于

$$\lim_{t\downarrow 0}L(t,\mu,\phi)=e^{-\langle\mu,\phi\rangle},\ \forall\ \mu\in M_F(E),\forall\ \phi\in V.$$

证明 由文献[37]的引理2.11易证. □

给定 $M_F(E)$ 上一个 Feller 转移函数,由[60]的第4章定理2.7知,存在一个右连左极的测度值过程 $\{X_t,P^\mu\}_{\mu\in M_F(E)}$,即具有右连左极的规范实现 $(D,\mathscr{D},\{\mathscr{D}_t\}_{t\geqslant 0},P^\mu\}_{\mu\in M_F(E)})$,其中 $D=D([0,\infty),M_F(E))$,即所有从$[0,\infty)$到 $M_F(E)$ 映射的全体(轨道空间),$X_t:D\to M_F(E);\omega\in D\to X_t(\omega)=\omega(t)$,$\mathscr{D}_t^0=\sigma(X_s:0\leqslant s\leqslant t\}$,$\mathscr{D}_t=\mathscr{D}_{t+}^0$,$\mathscr{D}=\vee\mathscr{D}_t$,$P^\mu$ 是 $\mathscr{D}$ 上的概率测度,$\{(D,\mathscr{D},\{\mathscr{D}_t\}_{t\geqslant 0},P^\mu,\mu\in M_F(E)\}$是强马尔可夫的且其转移函数为 $\mathscr{P}(t,\cdot;\cdot)$.

对于非齐次马氏过程我们有如下定义:

定义1.6.4 设(E,ε)是 Polish 空间,设 $\hat{E}\in\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{E}$,取 $E^t=\{x:(t,x)\in\hat{E}\}$. $\hat{E}$ 称为整体状态空间. 设$(\Omega,\mathscr{F})$是一个可测空间,对于$0\leqslant s\leqslant t<\infty$,$\mathscr{F}_{[s,t]}^0$是 $\mathscr{F}$ 的子 σ-代数,且若$[s,t]\subset[u,v]$,则有 $\mathscr{F}_{[s,t]}^0\subset\mathscr{F}_{[u,v]}^0$. 再令 $\mathscr{F}_{s,t}:=\bigcap_{\epsilon>0}\mathscr{F}_{[s,t+\epsilon]}^0$ 及 $\mathscr{F}_{s,\infty}:=\vee_{t\geqslant s}\mathscr{F}_{s,t}$. 若 $\tau\geqslant s$ 是一个$\{\mathscr{F}_{s,t}\}$停时,

$$\mathscr{F}_{s,\tau}:=\{A\in\mathscr{F}_{s,\infty}:A\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_{s,t},\forall\ t\geqslant s\},$$

则 $Z:=(\Omega,\mathscr{F}_{s,\infty},\{Z_t\},(P_{s,z})_{z\in E})_{s\geqslant 0}$**称作右连左极轨道的(时间)非齐 Borel 强马氏过程**,如果

(i)$\forall\ t\geqslant 0,Z_t:(\Omega,\mathscr{F}_{[t,t]}^0)\to(E,\mathscr{E})$是可测的.

(ii)$\forall\ (s,z)\in\hat{E},P_{s,z}$是$(\Omega,\mathscr{F}_{s,\infty})$上的概率测度,使得

$$P_{s,z}(Z_s=z,Z_t\in E^t,\forall\ t\geqslant s,Z\ 在[s,\infty)\ 右连左极)=1 \tag{1.6.2}$$

及对于$\forall\ A\in\mathscr{F}_{u,\infty}$,$(s,z)\to P_{s,z}(A)$在 $\hat{E}\cap([0,u]\times E)$上 Borel 可测.

(iii)如果$(s,z)\in\hat{E}$,$\psi\in b\mathscr{B}([s,\infty)\times D([s,\infty),E))$,$\tau\geqslant s$ 是$\{\mathscr{F}_{s,t}\}_{t\geqslant s}$停时,则在$\{\tau<\infty\}$上 $P_{s,z}$-a.s.,

$$P_{s,z}(\psi(\tau,Z_{\tau+\cdot})\,|\,\mathscr{F}_{s,\tau})(\omega)=P_{\tau(\omega),Z_\tau(\omega)}(\psi(\tau(\omega),Z_{\tau(\omega)+\cdot})), \tag{1.6.3}$$

即是强马氏性.

§ 1.7 过程的弱收敛

我们研究的测度值分枝过程可以由分枝粒子系统来逼近. 为此我们需要考察右连左极规范过程的(弱)收敛问题. 本节我们将回顾测度值过程序列紧性的一些基本准则，也可以看成一般 Polish 空间上过程的收敛准则的一些具体应用，因此先考虑 Polish 空间的情况. 鉴于结论的详细证明需要较大的篇幅，这里仅给出有关参考文献.

设(E,d)是一个 Polish 空间. 记 $\Lambda:=\{\lambda:[0,\infty)\to[0,\infty)$，严格增、Lipschitz 连续，满足如下条件(1.7.1)$\}$.

$$\gamma(\lambda):=\sup_{t>s\geq 0}\left|\log\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right|<\infty. \tag{1.7.1}$$

对于 $\omega,\omega'\in D_E=D([0,\infty),E)$，

$$\rho(\omega,\omega'):=\inf_{\lambda\in\Lambda}\Big(\gamma(\lambda)+\int_0^\infty e^{-u}\big(1\wedge\sup_{t\geq 0}d(\omega(t\wedge u),\omega'(\lambda(t)\wedge u))\big)du\Big). \tag{1.7.2}$$

易证 ρ 是 D_E 上一个距离，其导出的拓扑称为 **Skorokhod 拓扑**(J_1-拓扑). 令 $\mathscr{D}:=\mathscr{B}(D([0,\infty),E))$表示由此拓扑产生的 σ-代数. 取 $X_t(\omega):=\omega(t),\omega\in D_E,\mathscr{D}_t^0:=\sigma(X_s:0\leq s\leq t),\mathscr{D}_t:=\bigcap_{\varepsilon>0}\mathscr{D}_{t+\varepsilon}^0\subset\mathscr{D}$. 即$(D_E,\mathscr{D},(\mathscr{D}_t)_{t\geq 0},(X_t)_{t\geq 0})$表示 E 上规范随机过程. 对于 $f\in C(E)$，定义$\tilde{f}:D_E\to D([0,\infty),\mathbb{R}),(\tilde{f}x)(t):=f(x(t))$.

定理1.7.1 设(E,d)是 Polish 空间. D_E 上的概率列$\{P_n\}$是相对紧的当且仅当

(a)对于任何 $\varepsilon>0$及有理数 $t\geq 0$，存在一个紧集 $K_{\varepsilon,t}$使得

$$\sup_n P_n\{X(t)\in K_{\varepsilon,t}^c\}<\varepsilon. \tag{1.7.3}$$

(b)对于任何 $\varepsilon>0,T>0$存在 $\delta>0$使得

$$\sup_n P_n\{w'(X,\delta,T)\geq\varepsilon\}\leq\varepsilon, \tag{1.7.4}$$

其中对于 $X\in D_E$，$\Gamma_\delta=\{0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T;\min|t_i-t_{i-1}|\geqslant\delta, n\in\mathbb{N}\}$，

$$w'(x,\delta,T):=\inf_{\Gamma_\delta}\max_i\sup_{t_i\leqslant s<t\leqslant t_{i+1}}d(x(s),x(t)). \qquad (1.7.5)$$

证明 参见文献[9]，Theorem15.2及文献[60]，p.128. □

定理1.7.2(**Kurtz 胎紧准则**) 设(E,d)是一个 Polish 空间，$\{P_n\}$是 D_E 上满足上述定理条件(a)的概率序列. 假定对于某个$\beta>0$，任意 $n,T,\delta>0$，存在非负随机变量 $\gamma_n^T(\delta)\geqslant0$，使得对于$0\leqslant t\leqslant T$，$0\leqslant u\leqslant\delta$，

$$E_n([1\wedge d(X_{t+u},X_t)]^\beta|\mathscr{D}_t)\leqslant E_n[\gamma_n^T(\delta)|\mathscr{D}_t], \qquad (1.7.6)$$

及$\lim\limits_{\delta\to0}\sup\limits_n E_n[\gamma_n^T(\delta)]=0$，则$\{P_n\}$相对紧.

证明 参见文献[60]，p.138. □

命题1.7.3 设(E,d)同上，$\{P_\alpha\}_{\alpha\in A}$是$(D_E,\mathscr{D},(\mathscr{D}_t)_{t\geqslant0},(X_t)_{t\geqslant0})$上一簇概率律. 设 $\mathscr{A}\subset bC(E)$为代数，$D_0\subset\mathscr{A}$ 但 $\mathrm{cl}(D_0)\supset\mathscr{A}$. 如果对于任一 $f\in D_0$，存在一个右连左极适应过程 Z_f 使得

$$f(X(t))-\int_0^t Z_f(s)ds \qquad (1.7.7)$$

是一个$(\mathscr{D}_t,P_\alpha)$-鞅，且 $P_\alpha(\mathrm{esssup}_{s\leqslant t}|Z_f(s)|)<\infty$，或$\forall\ t<\infty$，$\exists\ p\in(1,\infty)$，

$$\sup_\alpha\left(E_\alpha\left(\int_0^t|Z_f(s)|^p ds\right)\right)^{1/p}<\infty. \qquad (1.7.8)$$

则对于任一 $f\in\mathscr{A}$，$\{P_\alpha\circ(\tilde{f})^{-1}\}_{\alpha\in A}$在 $D([0,\infty),\mathbb{R})$中胎紧.

证明 参见文献[60]中的第3章定理9.4. □

定理1.7.4(**Jakubowski 准则**) 设(E,d)是 Polish 空间，$\mathbb{F}$ 为 E 上实值连续函数值. 如果$\mathbb{F}$ 分离 E 的点而且对加法运算封闭，i.e. $f,g\in\mathbb{F}\Rightarrow f+g\in\mathbb{F}$，则 D_E 上概率测度$\{P_n\}$胎紧的充分必要条件是：

(i)对于任意 $T>0$及 $\epsilon>0$，存在紧集 $K_{T,\epsilon}\subset E$ 使得

$$P_n(D([0,t],K_{T,\epsilon}))>1-\epsilon,\forall\ n. \qquad (1.7.9)$$

(ii)概率簇$\{P_n\}$是$\mathbb{F}$-弱胎紧的，即对于任意 $f\in\mathbb{F}$，$D([0,\infty)$，

$\mathbb{R}$)上概率测度序列$\{P_n \circ (\tilde{f})^{-1}\}$胎紧，其中$\tilde{f}$如前所定义.

最后，若$\{P_n\}$是胎紧的，那么它在$M_1(D_E)$的弱拓扑下是相对紧的.

证明 参见文献[98]. □

以上定理把D_E上$\{P_n\}$的相对紧问题归结为实值情况，而对于实值情况我们有如下周知的结果.

定理1.7.5(Aldous胎紧准则) 设$\{P_n\}$是$D([0,\infty),\mathbb{R})$上一个概率测度序列，X是规范(轨道)过程. 假定

(i)对于任意有理数$t\geqslant 0$，$P_n\circ X_t^{-1}$在$\mathbb{R}$上胎紧.

(ii)给定停时τ_n，其界为T，$\delta_n\downarrow 0$当$n\to\infty$，那么

$$\lim_{n\to\infty} P_n(|X_{\tau_n+\delta_n} - X_{\tau_n}| > \varepsilon) = 0 \qquad (1.7.10)$$

或

(ii′)$\forall\ \eta>0$，$\exists\ \delta$，n_0使得

$$\sup_{n\geqslant n_0}\ \sup_{\theta\in[0,\delta]} P_n(|X(\tau_n+\theta) - X(\tau_n)| > \varepsilon) \leqslant \eta, \qquad (1.7.11)$$

则$\{P_n\}$胎紧.

证明 见文献[3]. □

基于这个结果，Joffe与Métivier(1986)导出了局部平方可积过程的胎紧准则，叙述如下. 首先我们引入几个概念.

定义1.7.6 定义在$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$上的右连左极实值适应过程$X$称为**D-半鞅**，如果存在上升的右连左极函数$A(t)$，线性子空间$D(L)\subset C(\mathbb{R})$以及一个映射$L$:$D(L)\times\mathbb{R}\times[0,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}$具有下列性质：

(a1)对于任一$(x,t,\omega)\in\mathbb{R}\times[0,\infty)\times\Omega$，映射$\phi\to L(\phi,x,t,\omega)$为$D(L)$上的线性函数且$L(\phi,\cdot,t,\omega)\in D(L)$.

(a2)对于任一$\phi\in D(L)$，$(x,t,\omega)\to L(\phi,x,t,\omega)$是$\mathscr{B}(\mathbb{R})\times\mathscr{P}$-可测的，其中$\mathscr{P}$是$[0,\infty)\times\Omega$上的可料$\sigma$-代数(由形如$(s,t]\times F$的集合生成，其中$F\in\mathscr{F}_s$，$s$，$t$任意). 对于任一$\phi\in D(L)$，过程$M^\phi$：

$$M^{\phi}(t,\omega):=\phi(X_t(\omega))-\phi(X_0(\omega))$$
$$-\int_0^t L(\phi,X_{s-}(\omega),s,\omega)dA_s \qquad (1.7.12)$$

是$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$上的局部平方可积鞅.

(b2)设 $\psi(x)$及 ψ^2属于 $D(L)$. 函数

$$\beta(x,t,\omega):=L(\psi,x,t,\omega),$$
$$\alpha(x,t,\omega):=L(\psi^2,x,t,\omega)-2x\beta(x,t,\omega)$$

分别称为**一阶与二阶局部系数**.

定义1.7.7(Joffe-Métivier D-半鞅胎紧准则) 设 $X^m=(X_t^m,\mathscr{F}^m,\mathscr{F}_t^m,P^m)$是一个 D-半鞅序列,相应的算子$\{L^m\}$具有公共的$D(L)$,相应的函数参数是$\{A^m\}$,$\{\beta_m\}$及$\{\alpha_m\}$. 那么序列$\{X^m;m\in\mathbb{N}\}$在 $D([0,\infty),\mathbb{R})$中是胎紧的,如果

(i)$\sup_m E|X_0^m|^2<\infty$,

(ii)存在 $K>0$及正的适应过程序列$\{C_t^m\}_{t\geq 0}$使得对于每一 $m\in\mathbb{N},x\in\mathbb{R},\omega\in\Omega^m$:

(a)$|\beta_m(x,t,\omega)|^2+\alpha_m(x,t,\omega)\leqslant K(C_t^m(\omega)+x^2)$,

(b)对于任一 $T>0$,

$$\sup_m \sup_{t\in[0,T]} E[C_t^m]<\infty,$$
$$\lim_{k\to\infty}\sup_m P^m(\sup_{t\in[0,T]} C_t^m\geqslant k)=0.$$

(iii)存在$[0,\infty)$上一个正的函数 γ 及下降数列$\{\delta_m\}$使得$\lim_{t\to 0}\gamma(t)=0,\lim_{m\to\infty}\delta_m=0$,及所有的$0<s<t$ 和所有的 m,

$$(A^m(t)-A^m(s))\leqslant\gamma(t-s)+\delta_m.$$

进一步,如果取 $M_t^m:=X_t^m-X_0^m-\int_0^t\beta_m(X_{s-}^m,s,\cdot)dA_s^m$,那么对于每一 $T>0$存在一个常数 K_T 及 m_0使得对于所有 $m\geqslant m_0$.

(iv)$E(\sup_{t\in[0,T]}|X_t^m|^2)\leqslant K_T(1+E|X_0^m|^2)$.

(v)$E(\sup_{t\in[0,T]}|M_t^m|^2)\leqslant K_T(1+E|X_0^m|^2)$.

证明 参见文献[102]. □

系1.7.8 假定对于 $T>0$,存在一个常数 K_T 使得

$$\sup_m \sup_{t\leqslant T,x\in \mathbb{R}}(|\alpha_m(t,x)|+|\beta_m(t,x)|)\leqslant K_T, \text{a.s.} \quad (1.7.13)$$

$$\sup_m(A^m(t)-A^m(s))\leqslant K_T(t-s), 0\leqslant s<t\leqslant T, \quad (1.7.14)$$

$$\sup_m E|X_0^m|^2<\infty, \quad (1.7.15)$$

以及 M_t^m 是一个平方可积鞅且 $\sup_m E(|M_T^m|^2)\leqslant K_T$，则 $\{X^m: m\in \mathbb{N}\}$ 在 $D([0,\infty),\mathbb{R})$ 中胎紧. □

§1.8 测度值过程的弱收敛及连续性

设 $M_1[D(\mathbb{R}_+, M_F(E))]$, $M_1[D(\mathbb{R}_+, M_p(\dot{\mathbb{R}}^d))]$, $M_1[D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})]$ 分别表示相应的带有弱收敛拓扑的 Skorokhod 空间上的概率测度全体.

定理1.8.1 (a)假定 E 是紧的，F 是 $C(E)$ 的一个稠子集，关于加法运算封闭. 序列 $\{P_n\}\subset M_1[D(\mathbb{R}_+, M_F(E))]$ 胎紧当且仅当对于每一 $\phi\in F$，$\{P_n\circ \tilde{f}_\phi^{-1}\}$ 在 $M_1[D(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})]$ 中胎紧. 其中 $f_\phi(\mu)=\langle\mu,\phi\rangle$，$\tilde{f}_\phi: D(\mathbb{R}_+, M_F(E))\to D(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$；$(\tilde{f}_\phi x)(t):=f_\phi(x(t))$.

(b) $M_1[D(\mathbb{R}_+, M_p(\dot{\mathbb{R}}^d))]$ 中的序列 $\{P_n\}$ 胎紧当且仅当对于每一 $\phi\in K_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$，$\{P_n\circ\tilde{f}_\phi^{-1}\}$ 在 $M_1[D(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})]$ 中胎紧. 其中，$K_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$ 如 §1.2.6给出.

证明 (a)的证明与(b)的证明类似，因此，我们只需证(b). 必要性由映射 $\tilde{f}_\phi$ 的连续性即得，往证充分性.

由假设知 $\{P_n\circ\tilde{f}_\phi^{-1}\}$ 在 $D([0,T],\mathbb{R})$ 中胎紧，因而对于任意的 $\varepsilon>0$，存在紧集 $K_\varepsilon\subset D([0,T],\mathbb{R})$ 使得 $P_n\circ\tilde{f}_\phi^{-1}(K_\varepsilon)\geqslant 1-\varepsilon$. 进而存在 $k_\varepsilon>0$ 使得 $K_\varepsilon\subset D([0,T],[-k_\varepsilon,k_\varepsilon])$. 令 $\Gamma_{T,\varepsilon}:=\{\mu: \mu\in M_p(\dot{\mathbb{R}}^d): |\langle\mu,\phi_p\rangle|\leqslant k_\varepsilon\}$，它是 $M_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$ 的紧子集. 然而，

$$P_n(D([0,T],\Gamma_{T,\varepsilon}))=P_n\circ\tilde{f}_{\phi_p}^{-1}(D([0,T],[-k_\varepsilon,k_\varepsilon]))\geqslant 1-\varepsilon,$$

从而定理1.7.4的条件(i)满足. 令 F 表示 $M_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$ 上形如 $f_\phi(\mu):=\langle\mu,\phi\rangle$，$\phi\in K_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$ 的函数类，显然 F 分离 $M_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$ 的点且关于加法

运算封闭.应用定理1.7.4即得所要结论. □

现在我们来建立测度值过程样本轨道连续性的准则.首先回顾 Kolmogorov 与 Ibragimov 轨道连续性准则.

引理1.8.2 (a)假定一个实值随机过程$\{Y(t):t\geqslant 0\}$满足

$$E|Y(t)-Y(s)|^r\leqslant C|t-s|^{1+\alpha},\ 0\leqslant s,t\leqslant T \qquad (1.8.1)$$

对于某些$r>0,\alpha>0$及正常数C成立,则对于固定T及任意的$\gamma\in(2,2+\alpha)$与$\lambda>0$

$$P\left\{\sup_{0\leqslant s<t\leqslant T}\frac{|Y(t)-Y(s)|}{|t-s|^{\beta}}\geqslant(8\gamma/(\gamma-2))(4\lambda)^{1/r}\right\}\leqslant CA/\lambda, \qquad (1.8.2)$$

其中$\beta=(\gamma-2)/r$,A是一个常数.特别地,对于任意$0<\beta<\alpha/r$,Y具有β-阶 Hölder 连续修正.

(b)设$\{Z(x):x\in\mathbb{R}^d\}$是一个随机场,满足

$$E|Z(x)-Z(y)|^r\leqslant C|x-y|^{d+\alpha}$$

对于某些$r>0,\alpha>0$.则对于任意$0<\beta<\alpha/r$,Z具有β-阶 Hölder 连续修正.

证明 参见文献[184],p.49或[194]中的第1章推论1.2. □

系1.8.3 设$\{X(t):t\geqslant 0\}$是一个取值于$M_F(E)$(相应地$M_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$)的随机过程,E是紧集,$\{f_n\}$是命题1.2.2所给的决定类(相应地,如§1.2.6),而且假定

$$P(|\langle X(t),f_n\rangle-\langle X(s),f_n\rangle|^r)\leqslant C|t-s|^{1+\alpha}. \qquad (1.8.3)$$

则 a.s. $X\in C([0,\infty),M_F(E))$(或$C([0,\infty),M_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$).另外,对于$\beta<\alpha/r$,$\{X(t):t\geqslant 0\}$在如(1.2.3)(相应地,(1.2.16))定义的距离之下,存在β-Hölder 连续修正.

证明 设$Z_n:=\sup_{0\leqslant s<t\leqslant T}\dfrac{|\langle X(t),f_n\rangle-\langle X(s),f_n\rangle|}{|t-s|^{\beta}}$且$2>\lambda>1$.应用(1.8.2)我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}P(Z_n\geqslant(8\gamma/(\gamma-2))4^{1/\gamma}\lambda^{n/\gamma})\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}CA/\lambda^n<\infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理,P-a.s.,

$$\sup_{0\leqslant s<t\leqslant T}\frac{d(X(t),X(s))}{|t-s|^{\beta}}\leqslant\sum Z_n/2^n<\infty.$$

□

§1.9 对称稳定过程

对于$0<\eta<1$及$t>0$设$q_\eta(t,\cdot)$为$\mathbb{R}_+$上稳定分布的连续密度函数，其 Laplace 变换为

$$\int_0^\infty q_\eta(t,s)e^{-s\theta}ds=\exp(-t\theta^\eta),\theta\geqslant 0. \tag{1.9.1}$$

由此容易看出，$q_\eta(t,\cdot)$有如下的自相似性：

$$q_\eta(t,s)=K^{1/\eta}q_\eta(Kt,K^{1/\eta}s),t,K>0,s\geqslant 0. \tag{1.9.2}$$

而且由文献[68]，Lemma17. 6. 1知，$q_\eta(1,s)\leqslant\text{const } s^{-1-\eta}$. 于是自相似性推出

$$q_\eta(t,s)\leqslant\text{const } ts^{-1-\eta},s,t>0. \tag{1.9.3}$$

另一方面，当$s\to 0$时$q(1,s)$以指数速度下降到0(参见文献[68]，定理13. 6. 1)，由此即知

$$\int_0^1 dsq_\eta(t,s)s^v<\infty,v\in\mathbb{R}. \tag{1.9.4}$$

对于$0<\alpha\leqslant 2$和$t>0$. 以$p_\alpha(t,x)$为$\mathbb{R}^d$上对称稳定过程的转移密度，其特征函数是：

$$\int dxp_\alpha(t,x)e^{iyx}=\exp(-t|y|^\alpha),y\in\mathbb{R}^d. \tag{1.9.5}$$

同样我们也有如下的自相似性：

$$p_\alpha(t,x)=K^{d/\alpha}p_\alpha(Kt,K^{1/\alpha}x),K,t>0,x\in\mathbb{R}^d. \tag{1.9.6}$$

$$p_\alpha(t,0)=t^{-d/\alpha}p_\alpha(1,0),K,t>0,x\in\mathbb{R}^d. \tag{1.9.7}$$

当$\alpha=2$时，

$$p_2(t,x)=(4\pi t)^{-d/2}\exp(-|x|^2/4t).$$

即正态分布密度函数. 如果$\alpha<2$，由(1.9.1)和(1.9.5)可得从属公式

$$p_\alpha(t,x) = \int_0^\infty ds q_{\alpha/2}(t,s) p_2(s,x). \tag{1.9.8}$$

因此，对于任意的 α 和 t，密度函数 $p_\alpha(t,\cdot)$ 是球面对称的，即 $p_\alpha(t,x)=p_\alpha(t,y)$ 若 $|x|=|y|$，且关于 $r=|x|$ 单调下降，其最大值为 $p_\alpha(t,0)$. 由从属公式以及控制收敛定理，$p_2(t,\cdot)$ 的连续性导致 $p_\alpha(t,\cdot)$ 的连续性. 自相似性也可得到 $p_\alpha(\cdot,x)$ 的连续性.

由(1.9.8)及(1.9.4)，当 $\alpha<2$，

$$p_\alpha(1,r) \leqslant \int_0^1 ds q_{\alpha/2}(1,s) p_2(s,r) + \text{const}\int_1^\infty ds s^{-1-\alpha/2} p_2(s,r).$$

此式很容易推出

$$p_\alpha(1,r) \leqslant \text{const}\ \frac{1}{r^{\alpha+d}}$$

对于所有 $\alpha\leqslant 2$ 成立. 再由自相似性可得

$$p_\alpha(t,r) \leqslant \text{const}\ \frac{t}{r^{\alpha+d}}, t,r>0. \tag{1.9.9}$$

令

$$w(t,x) := \int_0^t ds p_\alpha(s,x), t\geqslant 0, x\in \mathbb{R}^d.$$

由(1.9.9)，

$$\int_{|x|>K} dx w(t,x) \leqslant \text{const}\ t^2 K^{-\alpha}, t\geqslant 0, K>0. \tag{1.9.10}$$

引理1.9.1 对于任何的 $\chi\geqslant 1$, $\theta>0$ 和 $0\leqslant s<t$，我们有

$$\|w(t)-w(s)\|_\chi^\chi \leqslant \text{const}\left(\int_0^t d\sigma\sigma^{-\theta}\right)^{\chi-1}\int_0^t d\sigma\sigma^{-(d/\alpha-\theta)(\chi-1)}, \tag{1.9.11}$$

其中常数仅依赖于 d,α,χ.

证明 由 Jensen 不等式，

$$\begin{aligned}\|w(t)-w(s)\|_\chi^\chi &= \int dx\left(\int_0^t d\sigma\sigma^{-\theta}\sigma^\theta p_\alpha(\sigma,x)\right)^\chi \\ &\leqslant \left(\int_s^t d\sigma\sigma^{-\theta}\right)^{\chi-1}\int_s^t d\sigma\sigma^{-\theta}\sigma^{\chi\theta}\int dx p_\alpha^\chi(\sigma,x).\end{aligned}$$

由自相似性，

$$\int dx p_\alpha^\chi(\sigma,x) = \sigma^{-(\chi-1)d/\alpha}\int dx p_\alpha^\chi(1,x).$$

再由 $p_a(1,\cdot)$ 的可积性即得所要结论成立. □

文献评注:本章主要内容取材于文献[19]和[60],部分内容经过重新整理与补充. §1.9取材于文献[68],Ch. 13. 有关对称稳定过程更详细的结果,可参见[24]的附录.

第二章　分枝 Markov 过程

测度值分枝过程是分枝粒子系统的高密度极限.分枝粒子系统可以看成一种分枝 Markov 过程.因此,本章将简要介绍分枝 Markov 过程,并给出这类过程的一个直观描述,同时为下一章测度值分枝过程的引入做准备.由于篇幅所限,我们仅给出本章主要结论的大致证明,详见文献[91]及[143],Ch. Ⅻ.

简言之,分枝 Markov 过程是做随机演化的粒子系统:粒子的生存时间由一个概率分布决定.粒子在生命时以前,其运动由一给定随机过程的概率分布所决定.在粒子死亡时它又产生若干新的粒子,新的粒子与原来粒子的运动完全相同,而且系统中所有粒子的运动是相互独立的.

设 E 是一个拓扑空间.$\{\Omega,\mathscr{B}(\Omega),\xi_t,\zeta,P_a,a\in E\}$ 是 E 上的随机过程,其生命时为 ζ.假设 t 时刻,系统中有 n 个粒子,它们的位置构成了 $E^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_i\in E,i=1,2,\cdots,n\}$ 中的一个点.令

$$S=\bigcup_{n=0}^{\infty}E^n,\ E^0=\{\partial\}.$$

若考虑粒子是相互独立而且地位是平等的,那么这 n 个粒子的位置也可以看成**对称乘积空间** $E^{(n)}$ 中的一个点.其中

$$E^{(n)}\triangleq E^n/\sim,\tag{2.0.1}$$

$\sim$ 是 E^n 中点的一个等价关系,即对于任意的 $\bar{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$\bar{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in E^n$,$\bar{x}\sim\bar{y}$ 当且仅当 $\bar{x}$ 是 $\bar{y}$ 的一个分量置换.同样令

$$\overline{S}=\bigcup_{n=0}^{\infty}E^{(n)},\ E^0=\{\partial\}.\tag{2.0.2}$$

记 $S_\triangle:=S\cup\{\triangle\}$,$\overline{S}_\triangle:=S\cup\{\triangle\}$分别表示 S 和 S 的单点紧化.其中 ∂ 和$\triangle$是两个孤立点.∂ 表示系统灭绝状态,而$\triangle$表示爆发状态,这两个点是所讨论过程的吸引子.如何来构造分枝过程

呢？让我们先从过程的“拼凑”开始. 下面的讨论基于空间 S，对于空间 $\bar{S}$ 也适用.

§2.1 Markov 过程的拼凑

本节给出由有限生命时的 Markov 过程去“拼凑”Markov 过程的方法. 一个最简单的办法就是让死去的过程从它死去的位置“复活”，这一方法的关键在于如何把过程一段一段地连接在一起. 下面的讨论中的 S 可以是任意一个距离空间，不一定具有上述形式.

考虑一个有限生命时的 Markov 过程 $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), \xi_t, \zeta, P_a, a \in S)$. 按照通常的做法，我们引入状态空间以外的一个点 $\triangle$，以此表示过程在生命时之后的归宿. 自然地，定义生命时为

$$\zeta(\omega) = \sup\{t : \xi_t(\omega) \in S\},$$

于是取

$$\xi_t(\omega) = \triangle, \text{对于 } \forall\, t \geqslant \zeta(\omega).$$

对于 S 上的任何函数 f，我们还令 $f(\triangle)=0$.

假设 $\{\xi_t, \zeta, P_a, a \in S\}$ 是一个 Markov 过程，具有有限生命时 $\zeta < \infty$, a. s.. “复活”这个过程意指让该过程从点 $\xi_{\zeta-}(\omega)$ 处以一定嫁接方式(更新分布)获得新生. 为此，我们首先给出几个概念.

定义2.1.1 概率核 $N(\omega, db)$ 称为 $\Omega \times \mathscr{B}(S)$ 上一个**更新核**，如果

$$N(\theta_t\omega, \cdot) = N(\omega, \cdot), \text{当 } t < \zeta(\omega), \tag{2.1.1}$$

而

$$N(\omega, \cdot) = \delta_{\triangle}, \text{当 } \zeta(\omega) = 0. \tag{2.1.2}$$

一个典型的更新核的例子是

$$N(\omega, \cdot) = p(\xi_{\zeta(\omega)-}, \cdot), \tag{2.1.3}$$

其中 $p(a, db)$ 是 $S \times \mathscr{B}(S)$ 上的概率核，而且满足(2.1.2).

对于给定的更新核 $N(\omega, \cdot)$，在 $\Omega \times \mathscr{B}(\Omega)$ 上定义概率核

$$Q(\omega,B)=\int_S N(\omega,da)P_a(B),\ B\in\mathscr{B}(\Omega). \quad (2.1.4)$$

由 Ionescu-Tulcea 定理(参见文献[143]),存在$(\Omega^\infty,\mathscr{B}(\Omega)^\infty)$上的一族概率测度 Π_ω,使得对于任何有界可测函数 $f\in\Omega^n$,

$$\Pi_{\omega_1}f=\int Q(\omega_1,d\omega_2)\cdots Q(\omega_{n-1},d\omega_n)f(\omega_1,\cdots,\omega_n). \quad (2.1.5)$$

定义$(\Omega^\infty,\mathscr{B}(\Omega)^\infty)$上的一族概率测度

$$\overline{P}_a f=\int_\Omega P_a(\omega)\Pi_\omega f,\ f\in\mathscr{B}(\Omega)^\infty. \quad (2.1.6)$$

一列复活时间$\{r_k(\widetilde{\omega})\}_{k\geqslant 1}$,

$$r_k(\widetilde{\omega})=\sum_{i=1}^{k}\zeta(\omega_i),\widetilde{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots), \quad (2.1.7)$$

及一个过程 $X_t(\widetilde{\omega})$,

$$X_t(\widetilde{\omega})=\begin{cases}\xi_t(\omega_1), & \text{当 } 0\leqslant t<r_1(\widetilde{\omega}) \text{ 时};\\ \xi_{t-r_{k-1}}(\omega_k), & \text{当 } r_{k-1}(\widetilde{\omega})\leqslant t<r_k(\widetilde{\omega}) \text{ 时};\\ \triangle, & \text{当 } t\geqslant r_\infty(\widetilde{\omega}) \text{ 时},\end{cases} \quad (2.1.8)$$

其中 $\widetilde{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots)$,$r_\infty(\widetilde{\omega})=\lim\limits_{k\to\infty}r_k(\widetilde{\omega})$. 我们有

定理2.1.2 设$\{\xi_t,\zeta,P_a,a\in S\}$是一个具有有限生命时的 Markov 过程. 那么,

(i)再生过程$(X_t,r_\infty,\overline{P}_a,a\in S)$是过程,而且,

$$\{X_t;t<r_1,\overline{P}_a\}\text{ 与给定的过程}\{\xi_t;t<\zeta,P_a\}\text{ 同分布}. \quad (2.1.9)$$

且对于 Ω 上的有界可测函数 F 和 S 上的有界可测函数 g,

$$\overline{P}_a F(\omega_1)g(X_{r_1})=P_a F(\omega_1)N(\omega_1,g). \quad (2.1.10)$$

(ii)如果过程是强 Markov(右连续)的,则它的再生过程也是.

证明 定理的结论可从过程的构造中得到. 详细证明可参见[91]. □

定理2.1.3 记

$$\phi(a,dt,db)=\overline{P}_a(r_1\in dt,X_{r_1}\in db). \quad (2.1.11)$$

那么对于任一 S 上非负可测函数 f，$u(t,a)=\bar{P}_t f(a):=\bar{P}_a f(X_t)$ 是积分方程

$$u(t,a)=P_t f(a)+\int_{[0,t]\times S}\phi(a,dr,db)u(t-r,b)$$

(2.1.12)

的极小解. 其中 P_t 为已知过程的半群.

证明 由于 $\bar{P}_t f(a)=\sum_{k=0}^{\infty}P_t^{(k)}f(a)$，这里，$P_t^{(0)}f=P_t f$，$P_t^{(k)}f(a)=\bar{P}_a(f(X_t);r_k\leqslant t<r_{k+1})$. 从而易知结论成立. □

§2.2 分枝 Markov 过程的构造

前面我们给出了 S 上 Markov 过程连续起来的办法. 如何构造分枝 Markov 过程？办法是类似的，不同的仅是我们的出发点不一样. 这时，我们从最基本空间 E 上的 Markov 过程 $(\xi_t,\zeta,P_a,a\in E)$ 出发，先构造 S 上的有限生命时过程 $(\xi_t,\zeta,P_a,a\in S)$，然后采取上节的方法拼凑一个新过程 $(X_t,\zeta,P_a,a\in S)$，这个过程相对于 E 上的 ξ_t 而言称为分枝 Markov 过程.

对于 E 上任一给定的 Markov 过程 $\{\Omega,\mathscr{B}(\Omega),\xi_t,\zeta,P_x,x\in E\}$，我们可以构造 Ω^n 上的直积过程 $\{\xi_t,\zeta,P_a,a=(x_1,\cdots,x_n)\in E^n\}$ 如下：对于任一 $n\geqslant 1$，$\tilde{\omega}=(\omega_1,\omega_1,\cdots,\omega_n)$，

$$\zeta\tilde{\omega}:=\min\{\zeta(\omega_k);k=1,2,\cdots,n\},$$

$$\xi_t(\tilde{\omega})=\begin{cases}(\xi_t(\omega_1),\cdots,\xi_t(\omega_n)), & \text{若 } t<\zeta(\tilde{\omega});\\ \triangle, & \text{若 } t\geqslant\zeta(\tilde{\omega}),\end{cases}$$

$$P_a=P_{x_1}\times\cdots\times P_{x_n}, \text{对于 } a=(x_1,\cdots,x_n)\in E^n.$$

即过程的分量相互独立. 进一步，我们还可以得到定义在 $\Omega:=\bigcup_{n=0}^{\infty}\Omega^n$ 取值于 S 上的 Markov 过程：

$$\{\xi_t,\zeta,P_a,a\in S\}, \tag{2.2.1}$$

其中 $\Omega^0=\{\omega_\partial\}$，$\omega_\partial$ 是一个例外点使得 $\xi_t(\omega_\partial)=\partial,t\geqslant 0$.

设 $\pi_m(x,db)$ 是 $E\times\mathscr{B}(E^m)$ 上的概率核，定义

$$\pi(x,db) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(x)\pi_m(x,db), \qquad (2.2.2)$$

$\pi(x,db)$显然是 $E\times\mathscr{B}(S)$上的概率核,其中 $q_m(x)$是非负可测函数,使得

$$\sum_{m=0}^{\infty} q_m(x) = 1. \qquad (2.2.3)$$

约定 π_0是$\{\partial\}$的单点测度. 称$\{q_m(x),\pi_m(x,db),m\geqslant 0\}$为**分枝律**(branching law). 核 $\pi(x,db)$决定单个粒子的产生新粒子的数目和新粒子的位置分布.

不失一般性,我们可设 $q_1(x)\equiv 0$,即排除死一生一的这种无味分枝情况. 否则我们可以通过更换样板过程而把这一情形蕴含在 ξ_t 中. 显然这样做只是为着技术上的需要.

对于 $\bar{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$我们定义一个核 $\pi^{(i)},i\leqslant n$,

$$\int_S \pi^{(i)}(\bar{x},db)f(b) = q_0(x_i)f(x_1,\cdots,x_{i-1}x_{i+1},\cdots,x_n)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} q_m(x_i)\int_{E^m}\pi_m(x_i,db)$$

$$\times f(x_1,\cdots,x_{i-1},b,x_{i+1},\cdots,x_n), \qquad (2.2.4)$$

即 $\pi^{(i)}$表示 n 粒子系统中第 i 个粒子所产生后代的空间分布.

根据 $\pi^{(i)}$,定义 $\Omega\times\mathscr{B}(S)$上再生核 $N(\tilde{\omega},db)$:当 $\tilde{\omega}\in\Omega^n$,$\tilde{\omega}=(\omega_1,\cdots,\omega_n)$,

$$N(\tilde{\omega},db) = \sum_{i=1}^{n} 1_{\zeta(\tilde{\omega})=\zeta(\omega_i)}(\tilde{\omega})\pi^{(i)}(\xi_{\zeta}(\tilde{\omega}),db), \quad (2.2.5)$$

$$N(\omega_\partial,db) = \partial\text{的点测度}. \qquad (2.2.6)$$

那么,我们有

定理2.2.1 假设$\{\xi_t,\zeta,P_x,x\in E\}$是 E 上具有有限生命时的 Markov 过程,使得

$$P_x(\xi_{\zeta-}\ \text{存在且属于}\ E) = 1, P_x(\zeta = t) = 0, \forall\, t\geqslant 0.$$

给定分枝律$\{q_n(x),\pi_n(x,db),n\geqslant 0\}$,则存在 Markov 过程$\{X_t,r_\infty,\bar{P}_a,a\in S\}$使得

$$\bar{P}_x(f(X_t);t<r_1) = P_x(f(\xi_t);t<\zeta), x\in E, \quad (2.2.7)$$

$$\overline{P}_a(r_1 \in ds, X_{r_1} \in db) = \overline{P}_a(r_1 \in ds, N(\cdot, db)), a \in S, \tag{2.2.8}$$

以及

$$\overline{P}_{a\cdot b}(X_t \in \cdot) = \overline{P}_a(X_t \in \cdot) * \overline{P}_b(X_t \in \cdot), a, b \in S(\text{分枝性}), \tag{2.2.9}$$

其中 $N(\cdot, db)$由(2.2.5)、(2.2.6)给出."$*$"表示卷积.运算"$\cdot$"定义为 $a=(x_1,\cdots,x_n)\in E^n, b=(y_1,\cdots,y_m)\in E^m, a\cdot b:=(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)\in E^{m+n}, n,m\geqslant 1$.

证明 对于(2.2.1)给出的过程$\{\xi_t,\zeta,P_a,a\in S\}$与(2.2.5),(2.2.6)定义的再生核 $N(\widetilde{\omega},db)$,应用定理2.1.2.我们可以得到一个再生过程$\{X_t,r_\infty,\overline{P}_a,a\in S\}$.由过程的构造易证(2.2.7)与(2.2.8)成立.因此,只需证该再生过程的分枝性(2.2.9).

记

$$P_t^0 = P_t, P_t^k f(a) = \overline{P}_a(f(X_t); r_k \leqslant t < r_{k+1}), k \geqslant 1. \tag{2.2.10}$$

则由(下面将要证的)引理2.2.2可知,

$$\overline{P}_t(a\cdot b,\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} P_t^k(a\cdot b,\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} P_t^i(a,\cdot) * P_t^{k-i}(b,\cdot)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_t^k(a,\cdot) * \sum_{k=0}^{\infty} P_t^k(b,\cdot) = \overline{P}_t(a,\cdot) * \overline{P}_t(b,\cdot).$$

证毕. □

引理2.2.2 设 $P_t^k f(a)$如(2.2.10)所定义,则

$$P_t^k(a\cdot b,\cdot) = \sum_{i=0}^{k} P_t^i(a,\cdot) * P_t^{k-i}(b,\cdot), k = 0,1,2,\cdots. \tag{2.2.11}$$

证明 采用归纳法来证明(2.2.11).当 $k=0$时由过程的构造,结论显然成立.设

$$\phi(a,ds,db) = \overline{P}_a(r_1 \in ds, \xi_{r_1} \in db).$$

则由(2.2.4)—(2.2.7)

$$\phi(a\cdot b,ds,dc) = \phi(a,ds,dc_1)P_s(b,dc_2) + P_s(a,dc_1)\phi(b,ds,dc_2), \tag{2.2.12}$$

其中 $c=c_1\cdot c_2$. 由 X_t 在 r_k 处的强 Markov 性即可推出

$$P_t^k f(a) = \int_{[0,t]\times S} \phi(a,ds,db) P_{t-s}^{k-1} f(b). \qquad (2.2.13)$$

因此，联合(2.2.12)与(2.2.13)，我们有

$$\begin{aligned} P_t^{k+1} f(a\cdot b) &= \int_{[0,t]\times S} \phi(a\cdot b,ds,dc) P_{t-s}^k f(c) \\ &= \int_{[0,t]\times S\times S} \{\phi(a,ds,dc_1)P_s(b,dc_2) \\ &\quad + P_s(a,dc_1)\phi(b,ds,dc_2)\} \\ &\quad \times \sum_{i=0}^{k}\int_{S\times S} P_{t-s}^i(c_1,de_1)P_{t-s}^{k-i}(c_2,de_2)f(e_1\cdot e_2). \end{aligned}$$

再由于

$$P_s P_{t-s}^k f(a) = \int_{[s,t]\times S} \phi(a,dr,db) P_{t-r}^{k-1} f(b), \qquad (2.2.14)$$

记 $F^k(a,t,B)=P_sP_{t-s}^k(a,B)$，则有

$$\begin{aligned} P_t^{k+1} f(a\cdot b) &= -\sum_{i=0}^{k}\int_{[0,t]\times S\times S} \{dF^{i+1}(a,s,de_1)F^{k-i}(b,s,de_2) \\ &\quad + F^i(a,s,de_1)dF^{k+1-i}(b,s,de_2)\} f(e_1\cdot e_2) \\ &= -\sum_{i=0}^{k+1}\int_{[0,t]\times S\times S} \{dF^i(a,s,de_1)F^{k+1-i}(b,s,de_2) \\ &\quad + F^i(a,s,de_1)dF^{k+1-i}(b,s,de_2)\} f(e_1\cdot e_2). \end{aligned}$$

注意，dF 表示对 s 的微分，而在第二等式的计算中，我们增加 $(-dF^0)F^{k+1}$ 和 $-F^{k+1}(dF^0)$，约定($dF^0=0$!). 因此，

$$\begin{aligned} P_t^{k+1} f(a\cdot b) &= \sum_{i=0}^{k+1}\int_{S\times S} F^i(a,0,de_1)F^{k+1-i}(b,0,de_2)f(e_1\cdot e_2) \\ &= \sum_{i=0}^{k+1}\int_{S\times S} P_t^i(a,de_1)P_t^{k+1-i}(b,de_2)f(e_1\cdot e_2). \end{aligned}$$

这就证明了引理2.2.2. □

§2.3 分枝性与非线性积分方程

上节，我们借助于给定的 Markov 过程和分枝律给出了 S 上

的分枝 Markov 过程的构造. 这个过程在空间 S 上诱导一个线性算子半群. 但它在 E 上实现则表现为一个非线性半群. 因此,本节的主要目的是要说明分枝性与非线性的关系.

引入记号:

$$\mathscr{B}_1(E) = \{f \in \mathscr{B}(E), \|f\| \leqslant 1\}.$$

再定义映射"^": $f \in \mathscr{B}_1(E) \mapsto \mathscr{B}(S)$,

$$\hat{f}(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \bar{x} = \partial; \\ f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n), & \text{若 } \bar{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n); \\ 0, & \text{若 } \bar{x} = \triangle. \end{cases}$$

反过来,若 $g(\bar{x}) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 我们令 $g|_E = f$. 设 T_t 是 X_t 对应的 $\mathscr{B}(S)$ 上的半群,即

$$T_t f(x) = E_{\bar{x}} f(X_t), f \in \mathscr{B}(S). \tag{2.3.1}$$

于是分枝性可重写为

$$T_t \hat{f}(x) = \widehat{(T_t \hat{f})|_E}(x), x \in S, f \in \mathscr{B}_1(E). \tag{2.3.2}$$

也即 $\bar{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E^n \subset S$,

$$T_t \hat{f}(\bar{x}) = T_t \hat{f}(x_1) T_t \hat{f}(x_2) \cdots T_t \hat{f}(x_n). \tag{2.3.3}$$

我们知道, T_t 是由 X_t 决定的函数空间 $\mathscr{B}(S)$ 上一个线性半群. 由于 E 是 S 一个子集. 而映射"^"给出了函数类 $\mathscr{B}_1(E)$ 到 $\mathscr{B}(S)$ 的一个映射. 下面我们将要说明,半群 T_t 限制在 $\mathscr{B}(E)$ 是非线性半群,一般不再是线性的,除非没有分枝现象发生. 为此,引入 ζ 与 $\xi_{\zeta-}$ 的联合分布密度

$$K(x, ds, dy) \triangleq P_x(\zeta \in ds, \xi_{\zeta-} \in dy), y \in S, s \in [0, \infty) \tag{2.3.4}$$

及分枝机制(母函数)

$$F(y, u) \triangleq q_0(y) + \sum_{n=2}^{\infty} q_n(y) \int_{E^n} \pi_n(y, d\bar{a}) \hat{u}(\bar{a}), \tag{2.3.5}$$

其中 $u \in \mathscr{B}_1(E)$, $(q_n(y), \pi_n)_{n \geqslant 0}$ 满足(2.2.2),(2.2.3). 特别地,如果后代的出生地点与父辈的死亡点相同,则 $\{\pi_n, n \geqslant 0\}$ 是单点测度列,从而

$$\int_{E^n} \pi_n(y, d\bar{a}) \hat{u}(d\bar{a}) = u^n(y), y \in E, \qquad (2.3.6)$$

于是(2.3.5)可以改写为

$$F(y,u) \triangleq q_0(y) + \sum_{n=2}^{\infty} q_n(y) u^n. \qquad (2.3.7)$$

定理2.3.1 假设 X 是(ξ_t,ζ,π)-分枝 Markov 过程，ξ_t 与 π 满足定理2.2.1中的条件. 令

$$u(t,x) = T_t \hat{f}(x), x \in E, \in \mathscr{B}_1(E). \qquad (2.3.8)$$

那么它满足非线性积分方程

$$u(t,x) = P_t f(x) + \int_{[0,t]\times E} K(x,ds,dy) F(y,u_{t-s}), \qquad (2.3.9)$$

其中 $P_t f(x) := P_x(f(\xi_t), t<\zeta)$.

证明 由强 Markov 性可得

$$\bar{P}_x \hat{f}(X_t) = \bar{P}_x(\hat{f}(X_t); t < \zeta) + \bar{P}_x(\bar{P}_{X_\zeta}(\hat{f}(X_{t-s}))|_{s=\zeta}; t \geqslant \zeta). \qquad (2.3.10)$$

由分枝性(2.3.2)，

$$\bar{P}_{\bar{x}}(\hat{f}(X_{t-s})) = \bar{P}_{t-s} \hat{f}(\bar{x}) = \widehat{u_{t-s}}(\bar{x}), \bar{x} \in E^n,$$

所以

$$\bar{P}_{X_\zeta}(\hat{f}(X_{t-s}))|_{s=\zeta} = \widehat{u_{t-s}}(X_\zeta)|_{s=\zeta}. \qquad (2.3.11)$$

由于 $q_n(y) = \bar{P}_y(X_\zeta \in E^n)$是在位置 y 产生 n 个新粒子的概率，ζ 是 X 首次分枝的时间. 注意到在此之前，在 $\bar{P}_x, x \in S$ 下 X 的运动与(ξ_t, P_x)的运动一致. 于是 $\bar{P}_{\xi_{\zeta-}}(\widehat{u_{t-s}}(X_\zeta)) = F(\xi_{\zeta-}, u_{t-s})$. 从而(2.3.10)右边第二项变为

$$\int_{[0,t]\times E} P_x[\zeta \in ds, \xi_{\zeta-} \in dy; \bar{P}_{\xi_{\zeta-}}(\widehat{u_{t-s}}(X_\zeta))]$$

$$= \int_{[0,t]\times E} K(x,ds,dy) F(y,u_{t-s}).$$

而(2.3.10)中的第一项等于 $P_t f(x)$，这就证明了(2.3.9). □

上述定理描述了粒子系统开始时仅有一个粒子时的演变规律. 自然地，我们需要考虑初始状态有多个粒子的情况. 假设初始

时有 $m\geqslant 1$ 个粒子，它们的位置分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_m$. 取 $\bar{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，分枝性告诉我们

$$\bar{P}_{\bar{x}}\hat{f}(X_t)=\prod_{k=1}^{m}\bar{P}_{x_k}\hat{f}(X_t),f\in\mathscr{B}_1(E).\qquad(2.3.12)$$

注2.3.2 注意到 $X_t\in E^n$ 意味着 t 时刻系统中有 n 个粒子. X_t 的 n 个坐标分量分别表示这 n 个粒子的空间位置. 如果我们把每个粒子看成一个单位质点，这就相当于在有粒子的地方定义了一个单点测度. 记 E 上的所有取非负整数值测度的全体为 $M_N(E)$，定义映射 $\rho:S\mapsto M_N$，

$$\bar{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\in E^n,\rho(\bar{x})=\sum_{k=1}^{n}\delta_{x_k},n=1,2,\cdots.$$

其中 δ_x 表示 x 的单点测度. 那么 $\rho(X_t)\in M_N(E)$ 为 E 上取整数值随机测度. 于是若在(2.3.9)中以 $g(x)=e^{-f(x)}$ 代替 $f(x)$，则(2.3.9)化为

$$\bar{P}_xe^{-\langle f,\rho(X_t)\rangle}=P_x^0e^{-f(x)}+\int_{[0,t]\times E}K(x,ds,dy)F(y,u_{t-s}).$$

(2.3.13)

$f\in\mathscr{B}_1(E)$. 因此上式给出了随机测度 $\rho(X)$ 在 $\bar{P}_x(x\in E)$ 下的 Laplace 泛函. 特别当 $f(x)=1_B(x),B\in\mathscr{B}(E)$，则 $\langle f,\rho(X_t)\rangle$ 表示时刻 t 位于集合 B 中粒子的个数.

注2.3.3 若粒子所服从的过程 $(\xi_t,\zeta,P_a,a\in E)$ 是由一个(保守)Markov 过程 $(\xi_t,P_x,x\in E)$ 及其可加泛函 $K(s,t)\triangleq\int_s^t c(\xi_u)du$ 所诱导的次过程，即它的半群为 Feymann-Kac 半群：

$$P_tf(x)=P_x\left(\exp\left\{-\int_0^t c(\xi_s)ds\right\}f(\xi_t)\right),f\in\mathscr{B}(E),$$

(2.3.14)

则不难知道 ξ_t 的生命时 ζ 的分布函数为

$$P_x(\zeta>t)=P_x\left(\exp\left\{-\int_0^t c(\xi_s)ds\right\}\right),t\geqslant 0.\quad(2.3.15)$$

而且当 ξ_t 是轨道连续(扩散)过程时，(2.3.4)可以继续为

$$K(x,ds,dy)=P_x(\zeta<s+ds,\xi_\zeta\in dy)-P_x(\zeta<s,\xi_\zeta\in dy)$$

$$= -P_x\left[d\left(\exp\left\{-\int_0^s c(\xi_u)du\right\}\right)1_{dy}(\xi_s)\right]$$

$$= P_x c(\xi_s)\exp\left\{-\int_0^s c(\xi_u)du\right\}1_{dy}(\xi_s)ds$$

$$= P_s(x,dy)c(y)ds, \tag{2.3.16}$$

其中 $P_s(x,dy)$表示(ξ_t,ζ,P_a)的转移密度函数. 设

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

是一致椭圆扩散算子. ξ_t 是 L-扩散过程. 由定理2.3.1及以上的讨论易证如下结果:

系2.3.4 如果$(\xi_t,\zeta,P_x,x\in\mathbb{R}^d)$是由(2.3.14)定义的半群所决定的强 Markov 过程,令 $u(t,x)=\bar{P}_t\hat{f}(x), x\in\mathbb{R}^d, f\in\mathscr{B}_1(\mathbb{R}^d)$,则它满足

$$u(t,x) = P_t f(x) + \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} P_s(x,dy)c(y)dsF(y,u_{t-s}). \tag{2.3.17}$$

如果 $F(y,u)$由(2.3.7)式给出,则函数 $u(t,x)$是如下非线性抛物方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x) = Lu(x) + c(x)u(x) + c(x)\left\{q_0(x) + \sum_{n=2}^\infty q_n(x)u^n(x)\right\} \tag{2.3.18}$$

的一个弱解.

注2.3.5 如果 $f\geqslant 0, u(t,x)=\bar{P}_t\hat{f}(x)$是由分枝过程给出的积分方程(2.3.17)的极小解(参见文献[143]).

注2.3.6 本章只讨论了参数不依赖于时间的情况. 事实上,当有关参数与时间有关时,上述讨论也是类似的. 在下一章我们考虑时间非齐次情况时,直接应用了本章的结果.

文献评注 本章主要取材于文献[91]及[143],Ch. XII,部分内容稍做补充.

第三章　测度值分枝过程与超过程

考虑本章的主题：测度值分枝过程．为什么要研究测度值分枝过程？为什么它是当今国际上概率论中的热点？回答这些问题可能不易，但一个重要原因是它有着很强的实际背景，又适合当今数学发展的潮流，事实上，从§2.3我们看出，分枝性导致了非线性性．当然，测度值分枝过程自然也反映非线性现象，如人口的演化规律等，在物理、生物等自然科学中也有着重要的实际背景，并且和非线性发展方程有着密切联系．我们知道，非线性问题和无穷维随机分析是国际数学界普遍关心的研究课题，而测度值分枝过程正是兼顾这两方面的研究领域．因此，从理论和应用两方面来讲，这一领域具有先进性与实用性．另一方面，我们将会看到，测度值分枝过程又有很多别具特色的新问题，如测度方面的问题．解决这些问题需要新的知识、新的方法和新的思想，而且有相当的难度．所以测度值分枝过程给人们提供了一个丰富和发展数学思想方法的舞台．

本章首先给出测度值分枝过程的一般概念，然后着重讨论一类具体的测度值分枝过程——Dawson-Watanabe 超过程．这类超过程可由分枝粒子系统的高密度极限得到．为方便起见，下面简称为超过程[①]．它是状态空间为某种测度空间的随机过程．

§3.1　测度值分枝过程的定义

考虑 Polish 空间$(E,\mathscr{E})$及其上的一个测度空间$(M,\mathscr{M})$．设

① 通常讲有三类超过程：DW-超过程、FV-超过程和 OU-超过程，但在没有特别说明的情况下，超过程意指 DW-超过程．本书的最后一章将对这三个方面做比较全面的综述．

$(X_t, t\in T, P^\mu)_{\mu\in\mathscr{M}}$是取值于测度空间$(M,\mathscr{M})$上的随机过程，其中$T$表示时间域.

定义3.1.1 设$P(s,\mu;t,U):=P(X_t\in U\mid X_s=\mu)$，是$T\times M\times T\times\mathscr{M}$到$[0,1]$上的映射. 称$P(s,\mu;t,U)$是**转移函数**，如果对于$s,t,t+s\in T,\mu,\mu_1,\mu_2\in M$，

(1)$P(s,\cdot;t,U)$是$\mathscr{M}$-可测的；

(2)$P(s,\mu;t,\cdot)$是$\mathscr{M}$上的概率测度；

(3)$P(s,\mu;s,U)=I_U(\mu)$；

(4)$P(s,\mu;t+u,U)=\int_M P(t,\nu;t+u,U)P(s,\mu;t,d\nu)$

(Chapman-Kolmogorov 方程)；

(5)$P(s,\mu_1+\mu_2;t,U)=\int_M\int_M I_U(\nu_1+\nu_2)P(s,\mu_1;t,d\nu_1)P(s,\mu_2;t,d\nu_2)$(分枝性)；

(6)$P(s,\mu;t,U)$的对数泛函

$$\psi(s,\mu;t,f):=-\log\int_M P(s,\mu;t,d\nu)e^{-\langle\nu,f\rangle},f\in bp\mathscr{B}(E)\qquad(3.1.1)$$

满足对于所有的$s,t\in T,f\in p\mathscr{B}(E),\psi(s,\delta.;t,f)\in p\mathscr{B}(E)$；

$$\psi(s,\mu;t,f)=\int_E\psi(s,\delta_x;t,f)\mu(dx),\qquad(3.1.2)$$

其中δ_x表示质量集中于x点的单位测度. 从而称$(X_t,t\in T,P^\mu)$是一个(时间非齐次)**测度值分枝过程**，简称它为***M*-过程**.

如果过程是时间齐次的，我们以$P(t,\mu,U)$代替$P(s,\mu;t+s,U)$，记$\psi(t,\mu,f):=\psi(r,\mu;r+t,f)$. 为叙述上的方便，下面主要对时间齐次的情况进行讨论. 对于时间非齐次的情形结果是类似的. 如有不同之处，我们将特别说明.

首先，定义3.1.1中的条件(1)—(4)表明$P(t,\mu,U)$是一个M-值Markov过程，(5)则表明了它具有分枝性，因此过程X_t是无穷可分的. 根据无穷可分过程的**表示定理**(参见定理1.4.4)，存在E上的测度$\gamma(t,\mu,\cdot)$和M上的测度$N(t,\mu,\cdot)$，使得

$$\psi(t,\mu,f)=\langle\gamma(t,\mu,\cdot),f\rangle+\int_M(1-\exp\langle\nu,-f\rangle)N(t,\mu,d\nu),\qquad(3.1.3)$$

$f\in p\mathscr{B}(E)$，其中 $\gamma(t,\mu,\cdot)$，$N(t,\mu,\cdot)$ 分别称为 X_t 的**第一、第二谱测度**.

记 $\Phi(t,\mu,\cdot):=\int_M P(t,\mu,d\nu)e^{-\langle\nu,\cdot\rangle}$ 为 X_t 的 Laplace 泛函. 由定义3.1.1(1)，$x\to P(t,\delta_x,U)$ 是 $\mathscr{E}$-可测的. 从而，Φ,ψ,γ,N 有相同的可测性. 而且可以证明

$$\gamma(t,\mu,A)=\int_E\gamma(t,\delta_x,A)\mu(dx),A\in\mathscr{E},\qquad(3.1.4)$$

$$N(t,\mu,U)=\int_E N(t,\delta_x,U)\mu(dx),U\in\mathscr{M},\qquad(3.1.5)$$

$$\psi(s+t,\mu,f)=\psi(t,\mu,\psi(s,\delta.,f)),f\in p\mathscr{B}(E).\quad(3.1.6)$$

定义3.1.1中的性质(1)—(5)是一般古典分枝过程概念的直接推广. 而性质(6)乍看起来有些不自然，但下面的定理说明它在一定条件下可由(1)—(5)推出.

定理3.1.2 设转移函数 $P(t,\mu,U)$ 满足(1)—(5). 如果对于任意固定的 $t_0>0$，若

(a)存在 $\varepsilon>0$ 和 $a>0$ 使得 $P(t_0,\delta_x,\{\mu:\mu(E)\in[0,a)\})>\varepsilon$，$x\in E$.

(b)映射 $\mu\mapsto P(t_0,\mu,\cdot):(M,\rho_M)\to(M_1(E),\rho_{\mathscr{M}_1(E)})$ 是连续的. 其中 ρ 是测度空间上的 Prohorov 距离(见§1.2.1).

那么(6)成立.

证明 注意到，当 $x_n\to x$ 时，$\rho_M(\delta_{x_n},\delta_x)\to 0$. 那么由(b)，$P(t,\delta_x,U)$ 是 E 上的连续函数，从而不难证明 $\psi(t,\delta.,f)$ 为 E 上的可测函数.

现往证(3.1.2). 令 M_0 表示 M 中所有形如 $\mu=\sum_{i=1}^k a_i\delta_{x_i}$($a_i$ 是有理数)测度的全体. 由(5)式，$\psi(t,\mu_1+\mu_2,f)=\psi(t,\mu_1,f)+\psi(t,\mu_2,f)$，于是

$$\begin{aligned}\psi(t,\mu,f)&=\sum_{i=1}^k\alpha_i\psi(x_i,f)\qquad(3.1.7)\\&=\int_E\psi(x,f)\mu(dx),\mu\in M_0,f\in p\mathscr{B}(E).\end{aligned}$$

对于 $f\in pC(E)$，$\exp\{-\langle\mu,f\rangle\}$ 是 M 上的连续函数，进而由条件

(b)知若 $\rho_M(\mu_n,\mu)\to 0$，

$$\psi(t,\mu_n,f)\to\psi(t,\mu,f). \tag{3.1.8}$$

特别地，$\psi(t,\delta.,f)$对于 $f\in pC(E)$也是连续的，因此，对于 $f\in p\mathscr{B}(E)$，$\psi(t,\delta.,f)$是 $\mathscr{E}$-可测的. 而条件(a)推出 $\psi(t,\delta.,f)$有界，这就在 M_0上证明了(3.1.2).

由于 M_0在(M,ρ_M)中稠，所以当 $f\in pC(E)$时，(3.1.2)成立. 再由单调类定理可得(3.1.2)对所有的 $f\in p\mathscr{B}(E)$成立. 因此，$\psi(s,\mu;t,f)=\int_E\psi(s,\delta_x;t,f)\mu(dx)$. □

定义3.1.3 设 X_t 是转移函数为 $P(t,\mu,d\nu)$的 M-过程. 对于 $A_i\in\mathscr{E},i=1,2,\cdots,k$，定义

$$M^{(k)}(t,\mu;A_1,\cdots A_k)=\int_M\nu(A_1)\cdots\nu(A_k)P(t,\mu,d\nu) \tag{3.1.9}$$

及

$$\overline{M}^{(k)}(t,\mu;A_1,\cdots A_k)=\int_M\nu(A_1)\cdots\nu(A_k)N(t,\mu,d\nu). \tag{3.1.10}$$

若 M-过程 X_t 使得 $M^n(t,\delta.;\underbrace{S,\cdots,S}_{n})\in p\mathscr{B}(E)$，则称之为 **$M_n$-过程**.

显然，M_n-过程是 n-阶矩存在的 M-过程. 实际上，对于任意的 $1\leqslant k\leqslant n$，可以由(3.1.9)给出 $\underbrace{\mathscr{E}\times\cdots\times\mathscr{E}}_{k}$ 上一个测度，这个测度我们称之为 **k-阶矩测度**.

设 $A_1,\cdots,A_k\in\mathscr{E}$，定义 E^k 上的函数

$$\phi(t,\mu;A_1,\cdots,A_k;x_1,\cdots,x_k):=\psi(t,\mu;\sum_{i=1}^k x_i 1A_i(\cdot)). \tag{3.1.11}$$

由此及(3.1.1)可以证明

$$M(t,\mu;A)=\frac{\partial}{\partial x}\phi(t,\mu;A;x)|_{x=0}$$

以及

$$M^{(2)}(t,\mu;A,B)=\overline{M}^{(2)}(t,\mu;A,B)+M(t,\mu;A)M(t,\mu;B)$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\psi(t,\mu;A,B;x_1,x_2)|_{x_1=x_2=0}.$$

对于高阶情况也有类似公式，但比较复杂，我们不再赘述.

注3.1.4 (3.1.11)式的引入对计算测度值过程分枝过程的矩很有帮助. 实际上，我们在考虑超过程的矩时正是采用这种方法.

§3.2 超过程的定义与构造

自从测度值分枝过程由 Jirina[100,101] 与 Watanabe[209] 引入以来，已经发展为比较成熟的理论. 这一研究领域源于一个很直接的考虑，即它是粒子系统在一定时空尺度变换下的极限. 后来人们又从不同的角度发现了同样的现象，给出了测度值过程的不同形式，不同的构造方法，同时也为我们研究这种现象提供了多种途径与工具.

这一理论之所以发展这么快，除了问题本身的实际意义之外，主要原因还在于它的精确数学描述. 这使得人们能够利用现有的数学理论进行研究. 一方面它与对数 Laplace 泛函及非线性发展方程的密切联系. 另一方面，在随机过程理论的框架内还能够应用概率工具与方法，譬如，它的鞅特征使得我们可以借助随机分析的思想. 测度值分枝过程有一系列的别具特色的问题，如过程的局部空间结构、测度相对于底空间参考测度的绝对连续性与奇异性、支撑集的分形测度与维数以及时间空间尺度不变行为等.

分枝粒子系统可以纳入测度值分枝过程这一较大的范畴内. 尽管目前我们尚不完全清楚测度值分枝过程是否一定可以由分枝粒子系统的极限得到①，但超过程却可以由这种极限过程得到. 无论如何，粒子系统的高密度逼近给出了超过程的一种直观构造方法. 这种直观性对理解超过程很有帮助.

---

① Dynkin[48] 专门研究测度值分枝过程与超过程的关系，但问题还没有全部解决.

首先来构造超过程.我们先从 Markov 转移核与对数 Laplace 半群的关系开始.

3.2.1 Morkov 转移核与对数 Laplace 半群

设(E,d)是一个 Polish 空间,$M_F(E)$表示 E 上的有限 Borel 测度空间并装备弱拓扑.由上一节可知,$M_F(E)$-值测度值分枝过程$\{X_t\}_{t\geq 0}$的 Laplace 泛函 $L(s,t,\mu;\phi)$表示为

$$L(s,t,\mu;\phi) = E(e^{-\langle X_t,\phi\rangle} | X_s = \mu) = e^{-\int V_{s,t}\phi(x)\mu(dx)},$$

$\phi\in pb\mathscr{B}(E)$,$\mu\in M_F(E)$.其中 $pb\mathscr{B}(E)$上的非线性算子$\{V_{s,t}:s\leq t\}$满足如下两个基本性质:

(i)它是一个(时间非齐次)半群,即对于 $r\leq s\leq t$,

$$V_{r,s}(V_{s,t})=V_{r,t}, \quad V_{t,t}=I. \tag{3.2.1}$$

(ii)对于任一 $s,t\geq 0$及 $\mu\in M_F(E)$,映射 $\phi\mapsto\int V_{s,t}\phi(x)\mu(dx)$是 E 上随机测度的**对数 Laplace 泛函**.

满足(i)与(ii)的算子簇$\{V_{s,t}\}$称为对数 Laplace 半群(log-Laplace semigroup)①,它唯一决定 $M_F(E)$-值 Markov 过程的有限维分布.因此,对数 Laplace 半群成为首要研究的对象.

3.2.2 超过程的描述

超过程有三个基本要素:**底过程**、**分枝率**与**分枝机制**.用分枝粒子系统的观点,这三个要素可分别描述如下:

底过程——描述粒子的运动规律.一般假定底过程是一个规范时间非齐次 Borel 强 Markov 过程.具体来讲,设$(E,\mathscr{E})$是一个 Polish 空间,$D_E=D([0,\infty),E)$是带有 Skorokhod 拓扑的右连左极函数空间.对于$\omega\in D_E$,$\xi_t(\omega):=\omega(t)$,$t\geq 0$.对于任一 $t\geq 0$,假定有给定的$E^t\subset E$,并定义 $\hat{E}:=\{(s,x):x\in E^s\}$,$\hat{D}_E:=\{\omega\in D_E,\omega_t\in E^t,t\geq 0\}$,$\mathscr{E}^t:=\mathscr{E}\cap E^t$.再假定 $\hat{E}\in\mathscr{B}([0,\infty))\otimes\mathscr{E}$,$\hat{D}$ 是 D_E 的一

---

① 又称累加半群(cumulant-semigroup),或 Skorohod-半群,或 Ψ-半群.Ψ-半群理论是由 Watanabe[209]在1968年及 Silverstein[182]在1969年提出的.

个 Borel 子集. 对于$0\leqslant s\leqslant t$, $\mathscr{D}_{s,t}:=\bigcap_{\varepsilon>0}\sigma\{\xi_u:s\leqslant u\leqslant t+\varepsilon\}$, $\mathscr{D}:=\mathscr{D}_{0,\infty}$. 对于 $s\geqslant 0$, 设 $D_{E,s}:=D([s,\infty),E)$.

定义3.2.1 称过程$(\hat{D}_E,\mathscr{D},\mathscr{D}_{s,t},\{\xi_t\}_{t\geqslant 0},\{P_{s,x}\}_{s\geqslant 0,x\in E^s})$是一个**规范时间非齐次 Borel 强 Markov 过程**,如果它满足:

(i) $\forall\ (s,x)\in\hat{E}$, $P_{s,x}$是一个$(\hat{D}_E,\mathscr{D}_{s,\infty})$上概率测度,且使得对所有的 $A\in\mathscr{D}_{u,\infty}$, $(s,x)\to P_{s,x}(A)$在$([0,u]\times E)\cap\hat{E}$ 上 Borel 可测,且还有 $P_{s,x}(\xi_s=x)=1$.

(ii)(强 Markov 性)如果$(s,x)\in\hat{E}$, $f\in b\mathscr{B}([s,\infty)\times D_{E,s})$及 $\tau\geqslant s$ 为$\{\mathscr{D}_{s,t}:t\geqslant s\}$-停时,则

$$P_{s,x}(f(\tau,\xi_{\tau+\cdot})\,|\,\mathscr{D}_{s,\tau})(\omega)$$
$$=P_{\tau(\omega),\xi_{\tau(\omega)}}(f(\tau(\omega),\xi_{\tau(\omega)+\cdot}))\tag{3.2.2}$$

在$\{\tau<\infty\}$上 $P_{s,x}$-a.s. 成立.

相应的(时间)非齐次半群$\{S_{s,t}\}$定义为

$$S_{s,t}\phi(x)=P_{s,x}\phi(\xi_t),0\leqslant s\leqslant t,x\in E^s,\phi\in b\mathscr{B}(E).\tag{3.2.3}$$

现在研究较多的底过程是欧氏空间$\mathbb{R}^d$上对称 α-稳定过程$(1<\alpha\leqslant 2)$、一致椭圆扩散过程、Ornstein-Uhlenbeck 过程、分形上的 Brown 运动(参见文献[82])以及一些特殊流形上扩散过程(参见文献[187])等. 对于初学者不妨仅考虑$\mathbb{R}^d$ 上的 Brown 运动.

分枝率—决定单个粒子的分枝时间. 一般情况下,不同粒子有各自的分枝时间,如在分形介质中,粒子的分枝时间是按照各自的"钟表"来确定的. "钟表"提供了一个时间演变的尺度,而这个尺度不一定是均匀的. 一个自然而又广泛的刻画是(底过程)运动轨道的可加泛函.

设 $\kappa(dt)$是过程 ξ 的非负连续可加泛函,即 $\kappa:\hat{D}_E\to M_{LF}([0,\infty))$,使得 $\kappa(r,t):=\int_r^t\kappa(dx)$是 $\mathscr{D}_{r,t}$-可测的,而且对$0\leqslant r\leqslant t$,

$$\sup_{x\in E^r}P_{r,x}(e^{\theta\kappa(r,t)})<\infty,\forall\ \theta>0.\tag{3.2.4}$$

κ可产生时间区间上的一个随机测度. 特别地,当 $\kappa(dt)=dt$ 时,对应的测度就是 Lebesgue 测度. 尽管下面考虑的问题是在较广泛的条件下进行的,但为理解上简单起见,建议读者可先只考虑这个特

殊情况.

分枝机制①——描述粒子产生后代的个数. 设 $\lambda\geqslant 0$,

$$\Psi(t,x,\lambda)=\frac{1}{2}c(t,x)\lambda^2+b(t,x)\lambda+\int_0^\infty(e^{-\lambda u}-1+\lambda u)\nu(t,x,du). \quad (3.2.5)$$

其中 $x\in E'$, $t\geqslant 0$, $c\in pb(\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{B}(E))$, $b\in b(\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{B}(E))$, ν 是 $(\mathbb{R}_+,\mathscr{B}(\mathbb{R}_+))\times(E,\mathscr{E})$ 到 $M((0,\infty))$ 的可测映射，满足

$$\sup_{t,x}\int_0^\infty u^2\wedge u\nu(t,x,du)<\infty. \quad (3.2.6)$$

这里 Ψ 体现了粒子繁衍后代的个数. 从实际情况看它应为非负的. 为了以后讨论方便起见，我们不妨假定 $b\equiv 0$. 这时(3.2.5)即可简化为

$$\Psi(t,x,\lambda)=\frac{1}{2}c(t,x)\lambda^2+\int_0^\infty(e^{-\lambda u}-1+\lambda u)\nu(t,x,du),\lambda\geqslant 0, \quad (3.2.7)$$

(t,x), $x\in E'$, 否则讨论是类似的. 对于二分枝情形，也可以通过 Cameron-Martin-Girsanov 变换公式化成这种带有一次项的情况(参见注4.5.4).

容易证明，

$$\left.\begin{aligned}&\Psi(t,x,0)=0,\Psi(t,x,\lambda)\geqslant 0,\\&\Psi'(t,x,\lambda)=c(t,x)\lambda+\int_0^\infty(1-e^{-\lambda u})u\nu(t,x,du)\geqslant 0,\\&\Psi''(t,x,\lambda)=c(t,x)+\int_0^\infty e^{-\lambda u}u^2\nu(t,x,du)\geqslant 0,\\&(-1)^{k+1}\Psi^{(k)}(t,x,0)\leqslant 0,k\geqslant 2,\end{aligned}\right\}(3.2.8)$$

① El Karoui and Roelly-Coppoletta(1991)讨论了更一般的分枝特征：

$$\Psi(t,x,\lambda)=a(x)+b(t,x)\lambda+\frac{1}{2}c(t,x)\lambda^2+\int_0^\infty(e^{-\lambda u}-1+\lambda u)\nu(t,x,du),$$

其中 b,c，和 ν 与(3.2.5)的假设相同，而且 $a(x)$ 为有界可测函数. Jirina[100] Watanabe[209]和李增沪[128]等说明了过程的分枝性决定了其特征的上述的一般形式.

这里 $\Psi^{(k)}$ 则表示关于 λ 的 k-阶导数.

特别地，一个重要的分枝特征是**二分枝机制**(binary branching mechanism)，即单个粒子在死亡的时候，产生0个新粒子或2个新粒子的概率是$\frac{1}{2}$. 相应的分枝机制为

$$\Psi(t,x,\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2. \tag{3.2.9}$$

至此，我们已经分别描述了超过程的三个基本要素[①]对于给定的底过程 ξ_t、分枝率 κ 和分枝机制 Ψ，考察非线性积分方程

$$V_{s,t}\phi(x) = P_{s,x}\left[\phi(\xi_t) - \int_s^t \kappa(dr)\Psi(r,\xi_r,V_{r,t}\phi(\xi_r))\right], \tag{3.2.10}$$

其中 $\phi \in bp\mathscr{B}(E')$. 我们将要证明由上式确定的 $\{V_{s,t}\}$ 是一个非线性半群，这样就给出了对数 Laplace 泛函. 为此，要证明上述方程解的存在唯一性及由此诱导的算子是半群. 解的唯一性将用分析方法得到，存在性则基于分枝粒子系统的概率逼近. 从而通过概率方法说明 $\exp(-\int V_{s,t}\phi(x)\mu(dx))$ 是一个随机测度的 Laplace 泛函. 最后，$\{V_{s,t}\}$ 的半群性质将由(3.2.10)解的唯一性得到.

为了区别底过程的概率 $P_{r,x}$，我们**以上标来记超过程的概率，即 $P^{r,\mu}$，而且不加区别地用此记号表示超过程的概率与数学期望.**

3.2.3 几个技术性引理

引理3.2.2(Dynkin 一般化的 Gronwall 不等式) 假定 $h:[0,\infty)\times D_E \to \mathbb{R}$ 是循序可测函数且满足 $\sup_{t,x}|h(t,x)| \leqslant M < \infty$. 如果

$$h(r,x) \leqslant c_1 + c_2 P_{r,x}\int_r^t h(s,\xi_s)\kappa(ds), r \in [t_0,t), \tag{3.2.11}$$

其中 c_1, c_2 为非负常数，则

$$h(r,x) \leqslant c_1 P_{r,x} e^{c_2 k(r,t)}, r \in [t_0,t]. \tag{3.2.12}$$

证明 由(3.2.11)及归纳法，易证对于任意 $n \geqslant 1$，

---

① 在以后的讨论中，经常用分枝特征来代替分枝率和分枝机制. 在没有特别说明的情况下，则约定 $\kappa(dt) = dt$.

$$
\begin{aligned}
&h(r,x)\\
&\leqslant c_1\sum_{k=0}^{n}c_2^kP_{r,x}\int\cdots\int 1(r<s_1<\cdots s_k<t)\kappa(ds_1)\cdots\kappa(ds_k)\\
&\quad+c_2^{n+1}P_{r,x}\int\cdots\int 1(r<s_1<\cdots s_{n+1}<t)\\
&\qquad\cdot\kappa(ds_1)\cdots\kappa(ds_{n+1})h(s_{n+1},\xi_{s_{n+1}})\\
&=c_1\sum_{i=0}^{n}c_2^iP_{r,x}\kappa(r,t)^i/i!+R_{n+1},
\end{aligned}
$$

其中$|R_{n+1}|\leqslant M\cdot c_2^{n+1}P_{r,x}k(r,t)^{n+1}/(n+1)!$. 由条件(3.2.4)易知,$|R_{n+1}|\to0(n\to\infty)$,从而引理得证. □

引理3.2.3 假设c,ν分别满足(3.2.5),(3.2.6)中给定的条件,则任给$\lambda_0>0$,∃ $K(\lambda_0)>0$使得

$$
|\Psi(t,x,\lambda_1)-\Psi(t,x,\lambda_2)|\leqslant K(\lambda_0)|\lambda_1-\lambda_2|,\forall\ \lambda_1,\lambda_2\in(0,\lambda_0). \tag{3.2.13}
$$

证明 如果$\lambda_1<\lambda_2$,那么

$$
\begin{aligned}
&|\Psi(t,x,\lambda_1)-\Psi(t,x,\lambda_2)|\\
&\leqslant 2\lambda_0\sup_{t,x}\left|\frac{1}{2}c(t,x)\right||\lambda_1-\lambda_2| \qquad (3.2.14)\\
&\quad+\int_0^\infty|(e^{-\lambda_1u}+\lambda_1u)-(e^{-\lambda_2u}+\lambda_2u)|\nu(t,x,du).
\end{aligned}
$$

上式中右边第一项已是所要形式,因此只需去估计第二项. 注意到

$$
(e^{-\lambda_1u}+\lambda_1u)-(e^{-\lambda_2u}+\lambda_2u)=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}u(1-e^{-\lambda u})d\lambda,
$$

于是可证(3.2.14)中右边第二项为

$$
\begin{aligned}
&\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left\{\int_0^1\lambda u^2\nu(t,x,du)+\int_1^\infty u\nu(t,x,du)\right\}d\lambda\\
&\qquad\leqslant\left(\sup_{t,x}\int_0^\infty(u\wedge u^2)\nu(t,x,du)\right)|\lambda_1-\lambda_2|. \qquad (3.2.15)
\end{aligned}
$$

□

引理3.2.4 在上述假设下,方程(3.2.10)至多有一个解.

证明 考虑两个解$V_{s,t}^1\phi(x)$与$V_{s,t}^2\phi(x)$. 注意到

$$
\sup_x|V_{s,t}^i\phi(x)|\leqslant\sup_x|\phi(x)|:=\lambda_0,i=1,2.
$$

由引理3.2.3我们有

$$
\begin{aligned}
&|V^1_{s,t}\phi(x) - V^2_{s,t}\phi(x)| \\
&\leqslant P_{s,x}\left[\int_s^t \kappa(dr)|\Psi(r,\xi_r,V^2_{r,t}(\xi_r)) - \Psi(r,\xi_r,V^1_{r,t}(\xi_r))|\right] \\
&\leqslant K(\lambda_0)P_{s,x}\left[\int_s^t |V^2_{r,t}(\xi_r) - V^1_{r,t}(\xi_r)|\kappa(dr)\right]
\end{aligned}
$$

再由引理3.2.2即可推出 $|V^1_{s,t}\phi(x)-V^2_{s,t}\phi(x)|\equiv 0, \forall\ s<t$. □

引理3.2.5 设 $\mathscr{G}:[0,\infty)\times E\times[0,1]\to[0,1]$是可测函数. 方程

$$
w_{r,t}(x) = P_{r,x}\left[e^{-\phi(\xi_t)}e^{-\kappa(r,t)} + \int_r^t e^{-\kappa(r,s)}\kappa(ds)\mathscr{G}(s,\xi_s,w_{s,t}(\xi_s))\right] \tag{3.2.16}
$$

与

$$
\begin{aligned}
w_{r,t}(x) = P_{r,x}\Big[e^{-\phi(\xi_t)} &+ \int_r^t \kappa(ds)\mathscr{G}(s,\xi_s,w_{s,t}(\xi_s)) \\
&- \int_r^t \kappa(ds)w_{s,t}(\xi_s)\Big]
\end{aligned} \tag{3.2.17}
$$

等价.

证明 假定(3.2.17)成立,现来计算

$$
\begin{aligned}
&P_{r,x}\left\{\int_r^t e^{-\kappa(r,s)}\kappa(ds)\mathscr{G}(s,\xi_s,w_{s,t}(\xi_s))\right\} \\
&= P_{r,x}\Big\{-\int_r^t e^{-\kappa(r,s)}\kappa(ds)\int_s^t \mathscr{G}(u,\xi_u,w_{u,t}(\xi_u))\kappa(du) \\
&\qquad + \int_r^t \kappa(ds)\mathscr{G}(s,\xi_s,w_{s,t}(\xi_s))\Big\} \text{(分步积分)} \\
&= P_{r,x}\Big\{-\int_r^t e^{-\kappa(r,s)}\kappa(ds)\Big[w_{s,t}(\xi_s) - e^{-\phi(\xi_t)} \\
&\qquad + \int_s^t \kappa(du)w_{u,t}(\xi_u)\Big] \\
&\qquad + w_{r,t}(x) - e^{-\phi(\xi_t)} + \int_r^t \kappa(du)w_{u,t}(\xi_u)\Big\} \\
&\qquad\qquad \text{(由(3.2.17)及 Markov 性)} \\
&= w_{r,t}(x) - P_{r,x}\{e^{-\kappa(r,t)}e^{-\phi(\xi_t)}\}.
\end{aligned}
$$

其中最后一个等式是经简化后分步积分得到. □

3.2.4 超过程的构造——分枝粒子系统逼近方法

本节我们来证明方程(3.2.10)解的存在性.

定理3.2.6 给定分枝粒子系统的底过程、分枝率与分枝机制三元组(ξ,κ,Ψ),则存在定义在$[0,\infty)\times M_F(E)$上转移概率簇$\{P(s,\mu;t,U),s<t,\mu\in M_F(E),U\in\mathscr{B}(M_F(E))\}$,其 Laplace 泛函为

$$P^{s,\mu}e^{-\langle X(t),\phi\rangle}=\exp\left(-\int(V_{s,t}\phi)(x)\mu(dx)\right),\quad(3.2.18)$$

$\phi\in bp\mathscr{B}(E^t),t\geqslant s,\mu\in M_F(E)$. 而 $V_{s,t}\phi$ 满足方程(3.2.10).

首先,我们利用概率构造方法来证方程解的存在性. 为此,先证一个引理:

引理3.2.7 考虑分枝粒子系统$\{Z_t\}$,它所对应底过程ξ,分枝率$\kappa(dr)$分别满足上节的假设,并设分枝机制(母函数)为

$$\mathscr{G}(t,x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}p(t,x,n)z^n,$$

其中$p(t,x,n)$是在时刻t及位置x产生n个后代的概率,并满足

$$\sup_{t,x}\sum_{n=0}^{\infty}np(t,x,n)\leqslant K<\infty.\qquad(3.2.19)$$

则

(a)分枝粒子系统存在(即不爆发). r时刻在x点有一个粒子时,Z_t的 Laplace 泛函为

$$w_{r,t}(x):=P^{Z}_{r,\delta_x}e^{-\langle Z_t,\phi\rangle},$$

满足

$$w_{r,t}(x)=P_{r,x}\Big[e^{-\phi(\xi_t)}e^{-\kappa(r,t)}+\int_r^t e^{-\kappa(r,s)}\kappa(ds)\mathscr{G}(s,\xi_s,w_{s,t}(\xi_s))\Big].\quad(3.2.20)$$

(b) $P^{Z}_{r,x}(\langle Z_t,1\rangle)\leqslant P_{r,x}(e^{(K-1)\kappa(r,t)})$,

其中P^Z表示粒子系统的概率律.

证明 (a)过程的非爆发性由 Harris(1963)得到,参看文献[87],Ch.5,Th.9.1. 由定理2.3.1可知方程(3.2.20)成立.

(b)在(3.2.17)中取$\phi\equiv\theta$,然后两边同时对θ求导,再令$\theta=0$

并由引理3.2.2可得所要结果. □

定理3.2.6的证明 我们分四步来证之.

第一步:建立分枝粒子系统逼近. 给定满足(3.2.7)的 Ψ,令

$$\mathscr{G}^\varepsilon(t,x,v):=a(t,\varepsilon,x)^{-1}[a(t,\varepsilon,x)v + \varepsilon\Psi(t,x,(1-v)/\varepsilon)], \qquad (3.2.21)$$

其中 $0<a(t,\varepsilon,x):=\Psi'(t,x,\varepsilon^{-1})\leqslant c_1/\varepsilon+c_2$. 容易验证,对于 $0<\varepsilon<1$, $0\leqslant v\leqslant 1$, $\mathscr{G}^\varepsilon(t,x,v)$ 是均值为1的非负整数随机变量的母函数. 事实上,应用(3.2.7)与(3.2.8),易证 $\mathscr{G}^\varepsilon(t,x,0)=\varepsilon\Psi(t,x,1/\varepsilon)/a(t,\varepsilon,x)\geqslant 0$, $\mathscr{G}^\varepsilon(t,x,1)=1$, $D\mathscr{G}^\varepsilon(t,x,v)|_{v=0}=0$, $D\mathscr{G}^\varepsilon(t,x,v)|_{v=1}=1$ 以及 $D^k\mathscr{G}^\varepsilon\geqslant 0, k\geqslant 2$. 其中 D 表示相对于 v 的微分.

母函数 $\mathscr{G}^\varepsilon$ 给出了一个分枝机制. 若同时把粒子的质量由1个单位换成 ε 个单位,再适当地对分枝率作变换,在分枝粒子系统 Z_t 的基础上,可以得到新的粒子系统. 不妨称之为 **ε-分枝粒子系统**,记为 $\{Z_t^\varepsilon\}$. 然后以此来逼近以时刻 r 为初始时,以 μ 为初始测度的 (ξ,κ,Ψ)-超过程. 具体步骤如下.

首先考虑强度为 μ/ε 的 Poisson 随机测度 Z_r^ε,以及以此为初始测度,母函数为 $\mathscr{G}^\varepsilon$,分枝率为 $\kappa^\varepsilon(ds)=a(s,\varepsilon,\xi_s)\kappa(ds)$ 的分枝粒子系统 $\{Z_t^\varepsilon\}$. 结合引理3.2.7及 Poisson 丛随机测度公式(1.4.2),我们得到随机测度 $\varepsilon Z_t^\varepsilon$ 的 Laplace 泛函如下:

$$P_{r,\mathscr{P}(\mu/\varepsilon)}e^{-\langle Z_t^\varepsilon,\varepsilon\phi\rangle}=\exp\left(-\left\langle\mu,\frac{1-w_{r,t}^\varepsilon}{\varepsilon}\right\rangle\right), \qquad (3.2.22)$$

其中 $\mathscr{P}(\mu/\varepsilon)$ 表示强度为 μ/ε 的 Poisson 随机测度,$w_{r,t}^\varepsilon$ 如引理3.2.7,但此时需要把 $\mathscr{G}$ 替换为 $\mathscr{G}^\varepsilon$,即

$$w_{r,t}^\varepsilon(x)=P_{r,x}\Big[e^{-\varepsilon\phi(\xi_t)}e^{-\kappa^\varepsilon(r,t)} + \int_r^t e^{-\kappa^\varepsilon(r,s)}\kappa^\varepsilon(ds)\mathscr{G}^\varepsilon(s,\xi_s,w_{s,t}^\varepsilon(\xi_s))\Big],$$

那么由引理3.2.5,

$$w_{r,t}^\varepsilon(x)=P_{r,x}\Big[e^{-\varepsilon\phi(\xi_t)}+\int_r^t\kappa^\varepsilon(ds)\mathscr{G}^\varepsilon(s,\xi_s,w_{s,t}^\varepsilon(\xi_s)) - \int_r^t\kappa^\varepsilon(ds)w_{s,t}^\varepsilon(\xi_s)\Big]. \qquad (3.2.23)$$

取 $V^{\varepsilon}_{r,t}(x)=\dfrac{1-w^{\varepsilon}_{r,t}(x)}{\varepsilon}$ 代入上式得

$$V^{\varepsilon}_{r,t}(x)=P_{r,x}\left[\left(\frac{1-e^{-\varepsilon\phi(\xi_t)}}{\varepsilon}\right)-\int_r^t\kappa(ds)\Psi(s,\xi_s,V^{\varepsilon}_{s,t}(\xi_s))\right]. \tag{3.2.24}$$

而且由于 $\Psi\geqslant0$，则还有

$$0\leqslant V^{\varepsilon}_{r,t}(x)\leqslant P_{r,x}\left(\frac{1-e^{-\varepsilon\phi(\xi_t)}}{\varepsilon}\right)\leqslant P_{r,x}\phi(\xi_t). \tag{3.2.25}$$

第二步：对数 Laplace 泛函的收敛.

引理3.2.8 $V^{\varepsilon}_{r,t}(x)\xrightarrow{\varepsilon\downarrow0}V_{r,t}(x)$ 关于 x 一致存在，且 $V_{r,t}(x)$ 是方程(3.2.10)的唯一解.

证明 由(3.2.25)知，当 ϕ 非负有界（比如小于 λ_0），则 $0\leqslant V^{\varepsilon}_{r,t}(\cdot)\leqslant\lambda_0$. 于是由 Ψ 的 Lipschitz 性我们得到

$$|V^{\varepsilon_1}_{r,t}-V^{\varepsilon_2}_{r,t}|(x)\leqslant\left\|P_{r,\cdot}\left(\frac{1-e^{-\varepsilon_1\phi(\xi_t)}}{\varepsilon_1}-\frac{1-e^{-\varepsilon_2\phi(\xi_t)}}{\varepsilon_2}\right)\right\|$$

$$+K(\lambda_0)P_{r,x}\int_r^t\kappa(ds)|V^{\varepsilon_1}_{s,t}-V^{\varepsilon_2}_{s,t}|(\xi_s),$$

其中 $K(\lambda_0)$ 为 Ψ 的 Lipschitz 常数（见引理3.2.3）. 从而由引理3.2.2，

$$\|V^{\varepsilon_1}_{r,t}-V^{\varepsilon_2}_{r,t}\|\leqslant\left\|P_{r,\cdot}\left(\frac{1-e^{-\varepsilon_1\phi(\xi_t)}}{\varepsilon_1}-\frac{1-e^{-\varepsilon_2\phi(\xi_t)}}{\varepsilon_2}\right)\right\|$$

$$\times\sup_x P_{r,x}e^{K(\lambda_0)\kappa(r,t)}. \tag{3.2.26}$$

由此可见极限 $V_{r,t}$ 存在. 再由(3.2.25)及控制收敛定理即可知 $V_{r,t}$ 又满足方程(3.2.10).

第三步：$V_{r,t}$ 是算子半群. 对于 $\phi\in bp\mathscr{B}(E')$，由于

$$V_{r,t}\phi(x)=P_{r,x}\left[\phi(\xi_t)+\int_r^t\kappa(du)\Psi(u,\xi_u,V_{u,t}\phi(\xi_u))\right],x\in E', \tag{3.2.27}$$

我们有

$$V_{s,r}[V_{r,t}\phi](x)$$

$$=P_{s,x}\left[(V_{r,t}\phi)(\xi_r)+\int_s^r\kappa(du)\Psi(u,\xi_u,V_{u,r}(V_{r,t}\phi)(\xi_u))\right]$$

$$= P_{s,x}\Big[P_{r,\xi_r}\phi(\xi_t) + P_{r,\xi_r}\int_r^t \kappa(du)\Psi(u,\xi_u,V_{u,t}\phi(\xi_u))\Big]$$

$$+ P_{s,x}\Big[\int_s^r \kappa(du)\Psi(u,\xi_u,(V_{u,r}V_{r,t})\phi(\xi_u))\Big]$$

$$= P_{s,x}\Big[\phi(\xi_t) + \int_s^r \kappa(du)\Psi(u,\xi_u,(V_{u,r}V_{r,t})\phi(\xi_u))$$

$$+ \int_r^t \kappa(du)\Psi(u,\xi_u,V_{u,t}\phi(\xi_u))\Big]\text{(由 } \xi \text{ 的 Markov 性)}.$$

从而

$$U_{u,t}\phi := \begin{cases} V_{u,t}\phi, & u \geqslant r; \\ V_{u,r}(V_{r,t}\phi), & u < r. \end{cases} \tag{3.2.28}$$

与 $V_{u,t}$ 满足同一个对数 Laplace 方程，因此由方程解的唯一性即得 $V_{s,t}=V_{s,r}V_{r,t}, s<r<t$.

第四步：完成定理之证明. 首先由分枝的临界性知道一阶矩测度

$$P_{r,\mathscr{P}(\mu/\varepsilon)}(\varepsilon Z_t^\varepsilon(dx)) = S_{r,t}\mu(dx) \in M_F(E). \tag{3.2.29}$$

因此，由引理1.3.10，该概率测度列是胎紧的，从而随机测度 $\{\varepsilon Z_t^\varepsilon: \varepsilon>0\}$ 也是胎紧的. 联合引理3.2.8及定理1.3.5我们知道 $X_t^\varepsilon := \varepsilon Z_t^\varepsilon$ 弱收敛于一个随机测度 X_t，其 Laplace 泛函为(3.2.18). 注意到当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\varepsilon Z_r^\varepsilon$ 弱收敛于 μ 而且 $\mu \to \int V_{s,t}\phi(x)\mu(dx)$ 是 $\mathscr{B}(M_F(E))$-可测函数. 这就证明了(3.2.18)是 Laplace 转移泛函，从而定理得证. □

系3.2.9 当 $\varepsilon\to 0$，过程 $X_t^\varepsilon := \varepsilon Z_t^\varepsilon$ 依(有限维)分布收敛于过程 $\{X_t\}$，其中限维分布由如下联合 Laplace 泛函确定：对于 $s\leqslant t_1\leqslant \cdots \leqslant t_n, \phi_1,\cdots,\phi_n \in pb\mathscr{B}(E)$，

$$P^{s,\mu}\exp(-[\langle X_{t_1},\phi_1\rangle + \cdots + \langle X_{t_n},\phi_n\rangle])$$
$$= \exp(-\langle \mu, V_{t_1,\cdots,t_n}(\phi_1,\cdots,\phi_n)\rangle), \tag{3.2.30}$$

其中 V 可以递推定义为

$$V_{t_1}(\phi_1) = V_{s,t_1}(\phi_1),$$

$$\cdots\cdots,$$

$$V_{t_1,\cdots,t_n} = V_{t_1,\cdots,t_{n-1}}(\phi_{n-1} + V_{t_{n-1},t_n}\phi_n).$$

而 $V_{s,t}$ 由方程(3.2.10)的解给出.

证明 对 n 进行归纳. $n=1$时我们已证. 现证 $n\geqslant 2$的情况. 首先,由 Z_t^ε 的无穷可分性及其 Markov 性,对 $r<t$,

$$\begin{aligned}
&P_{r,Z_r^\varepsilon}\exp\{-\langle\varepsilon Z_t^\varepsilon,\phi\rangle\}\\
&\quad=\exp\{\langle Z_r^\varepsilon,\log P_{r,\cdot}\exp\{-\langle\varepsilon Z_t^\varepsilon,\phi\rangle\}\rangle\}\\
&\quad=\exp\{\langle Z_r^\varepsilon,\log w_{r,t}^\varepsilon(\phi)\rangle\}\\
&\quad=\exp\{\langle Z_r^\varepsilon,\log(1-\varepsilon V_{r,t}^\varepsilon(\phi))\rangle\}. \qquad (3.2.31)
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
&P_{s,\mathscr{P}(\mu/\varepsilon)}\exp(-[\langle X_{t_1}^\varepsilon,\phi_1\rangle+\cdots+\langle X_{t_n}^\varepsilon,\phi_n\rangle])\\
&\quad=P_{s,\mathscr{P}(\mu/\varepsilon)}\exp(-[\langle X_{t_1}^\varepsilon,\phi_1\rangle+\cdots\\
&\qquad+\langle X_{t_{n-1}}^\varepsilon,\phi_{n-1}+V_{t_{n-1},t_n}\phi_n\rangle\\
&\qquad+\langle X_{t_{n-1}}^\varepsilon,\varepsilon^{-1}\log(1-\varepsilon V_{t_{n-1},t_n}^\varepsilon(\phi_n))-V_{t_{n-1},t_n}\phi_n\rangle]).
\end{aligned}$$

由引理3.2.8知,当 $\varepsilon\to 0$时,

$$\|\varepsilon^{-1}\log(1-\varepsilon V_{t_{n-1},t_n}^\varepsilon\phi_n)-V_{t_{n-1},t_n}\phi_n\|\to 0. \qquad (3.2.32)$$

由归纳假设,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}P_{s,\mathscr{P}(\mu/\varepsilon)}\exp(-[\langle X_{t_1}^\varepsilon,\phi_1\rangle+\cdots+\langle X_{t_{n-1}}^\varepsilon,\phi_{n-1}\rangle])\\
&\quad=\exp(-\langle\mu,V_{t_1,\cdots,t_{n-1}}(\phi_1,\cdots,\phi_{n-1})\rangle), \qquad \square
\end{aligned}$$

从而即得所需结论.

注3.2.10 至此,我们构造了(ξ,κ,Ψ)-超过程的有限维分布. 由 Kolmogorov 构造理论,可以在右连左极轨道空间上实现相应的过程. 称相应的 $M_F(E)$-值时间非齐次的 Markov 过程称为(ξ,κ,Ψ)-超过程. 特别当 $\kappa(ds)=ds$ 及底过程为右过程的条件下, Fitzsimmons[69](1988)构造了 $M_F(E)$-值右过程. 这里时间非齐次的讨论是属于 Dawson[19], Dawson-Perkins[33], Dynkin[43,48]等人的工作. 更一般的讨论请参见 E. B. Dynkin, S. E. Kuznetsov, A. V. Skorokhod 的系列工作,如[54]等.

当然,超过程的内涵的还可以进一步扩大. 我们将在§3.6讨论增广超过程(enhanced superprocesses).

注3.2.11 设$(\xi_t, t\geqslant s, P_{s,x}, x\in E)$是 Markov 过程，相对于 E 上的参考测度 $\mathscr{L}$ 存在转移密度 $p(s,t;x,y)$. 底过程在点 $c\in E$ 的局部时存在，并记为 L_s^c. 取 $\kappa(s,t)=\rho(L_t^c-L_s^c)$，$\rho>0$，$s<t$，则方程(3.2.10)可化为

$$V_{s,t}\phi(x) = \int_E p(s,t;x,y)\phi(y)\mathscr{L}(dy) - \rho\int_s^t p(s,r;x,c)\Psi(r,c,V_{r,t}\phi(c))dr. \qquad (3.2.33)$$

并称由上式决定的 $V_{s,t}$ 为非线性半群的超过程为**催化超过程**(superprocess with catalyst). 详见文献[24,21,22].

§3.3 (α,d,β)-超过程

为了理解超过程，需要对其性质进行系统研究. 在一般条件下研究超过程是困难的. 先从较简单的情况开始. 本节讨论一类经典的(α,d,β)-超过程.

定义3.3.1 设 $E=\mathbb{R}^d$，底过程 ξ 是对称 α-稳定过程(其无穷小算子记为$\triangle_\alpha=-(-\triangle)^{\alpha/2}$，$0<\alpha\leqslant 2$)，分枝率 $\kappa(ds)=ds$ 及分枝机制 $\Psi(x,\lambda)=\gamma\lambda^{1+\beta}$，$0<\beta\leqslant 1$，$\gamma$ 为非负常数. 此时(ξ,κ,Ψ)-超过程称为**(α,d,β)-超过程**，并简记为 $S(\alpha,d,\beta)$. 它是时间齐次的测度值分枝过程.

注3.3.2 $S(\alpha,d,\beta)$是上节所定义超过程的特例. 事实上，在式(3.2.7)中取

$$\begin{cases}\nu(du)=\dfrac{\beta(1+\beta)\gamma}{\Gamma(1-\beta)}\dfrac{1}{u^{\beta+2}}du, c(\cdot)\equiv 0, & \text{当 } \beta<1\text{时};\\ \nu=0, c(\cdot)\equiv\chi, & \text{当 } \beta=1\text{时}\end{cases} \qquad (3.3.1)$$

即可. □

为了更清楚地认识超过程的粒子系统逼近，现在考察这一特殊情况. 考虑 ϵ-分枝粒子系统，其母函数为

$$\mathscr{G}^\epsilon(v) = v + (1+\beta)^{-1}(1-v)^{1+\beta}, \qquad (3.3.2)$$

分枝率为

$$\kappa^{\epsilon}(ds) = \gamma(1+\beta)\epsilon^{-\beta}ds. \tag{3.3.3}$$

注意，$\mathscr{G}^{\epsilon}$与 ϵ 无关. 特别 $\beta=1$，$\mathscr{G}^{\epsilon}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}v^2$，它是二元分枝情况的母函数. 现在我们来看在逼近过程中粒子系统那些量在发生变化.

从三个方面(即初始状态、分枝率和分枝机制)来考察粒子系统的演化. 首先来看初始状态. 如果超过程的初始测度为 μ，则对应的 ϵ-分枝粒子系统粒子的初始分布是由强度为 μ/ϵ 的 Poisson 点过程所决定，而此时粒子的质量被假定为 ϵ. 这样就保持系统的初始质量不因系统的变化而变化. 因此随着 ϵ 的减小，系统中开始时的粒子数目必须相应地增多. 超过程就是高密度粒子系统的极限. 其次，由式(3.3.2)知，粒子产生后代的机制没有变化. 最后，由式(3.3.3)知，随 ϵ 的减少，粒子的分枝时间缩短，发生分枝的频率加大.

注3.3.3 对于一个给定的超过程，逼近它的分枝粒子系统序列可以是不同的. 但可以导出同一个对数 Laplace 方程，因此在分布相同的意义下，超过程是唯一的. 前面，通过分枝特征直接构造一种逼近序列. 我们看到，在粒子系统逼近过程中，要求初始平均质量保持不变，但粒子数目越来越多，发生分枝的频率越来越高，而分枝机制可能不会改变.

另一方面，也可以选择不同的逼近方式. Watanabe[209]和赵学雷[224]采用由已给测度直接构造逼近粒子系统序列初始粒子的分布，而不是由 Poisson 点过程来确定. 其一个好处是使得超过程的计算机模拟比较简单.

现在来考察 $S(\alpha,d,\beta)$的性质. 根据超过程的定义，$S(\alpha,d,\beta)$的对数 Laplace 泛函 $V_t\phi$ 是方程

$$V_t\phi(x) = S_t^{\alpha}\phi(x) - \gamma\int_0^t S_u^{\alpha}[(V_{t-u}\phi)^{1+\beta}]du \tag{3.3.4}$$

的唯一解. 其中 S_t^{α} 表示对称 α-稳定过程的算子半群. 该解若写成微分形式，即是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \triangle_\alpha u(t,x) - \gamma u^{1+\beta}(t,x), x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = \phi(x) \in bp\mathscr{B}(\mathbb{R}^d). \end{cases} \tag{3.3.5}$$

然而，对于一般的初值 $\phi \in bp\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$，$u(t,x)=V_t\phi(x)$ 不一定可微，因此(3.3.5)在弱意义下才能成立。我们称(3.3.5)的解为 **mild 解**(mild solution)，如果它满足积分方程(3.3.4)。特别地，称过程 $S(2,d,1)$ 为**超 Brown 运动**。

$S(\alpha,d,\beta)$ 是超过程研究中最重要的课题之一。它的有关理论已经相当完善，且有很多好的性质，我们将在以后进行介绍。在此先看它的时空尺度不变性。

我们知道对称 α-稳定过程是时空齐次的，若以 p_t^α 表示它的转移密度，由 §1.9的讨论易知

引理3.3.4 1)对于 $0<\alpha\leqslant 2, t>0$，p_t^α 是光滑、对称、单峰分布密度。

2)对于 $0<\alpha\leqslant 2, t>0, x\in\mathbb{R}^d$，

$$p_t^\alpha(t^{1/\alpha}x) = t^{-d/\alpha}p_1^\alpha(x). \tag{3.3.6}$$

3)对于 $0<\alpha<2, x\in\mathbb{R}^d$，及 $|x|\geqslant 1$，

$$p_1^\alpha(x) \leqslant \frac{c}{|x|^{d+\alpha}}, c\geqslant 0 \text{是依赖 } \alpha \text{ 的常数}. \tag{3.3.7}$$

特别地，当 $\alpha=2$ 时，$p_1^2(x)=(2\pi)^{-d/2}\exp(-x^2/2), x\in\mathbb{R}^d$。

定理3.3.5 对于 $T>0$，

$$V_t(T^{-\alpha/\beta}\phi(\cdot/T))(y) = T^{-\alpha/\beta}V_{t/T^\alpha}(\phi)(y/T). \tag{3.3.8}$$

证明 由(3.3.6)可知，$(S_{t/T^\alpha}^\alpha\phi)(y/T)=(S_t^\alpha\phi(\cdot/T))(y)$，于是，

$$\begin{aligned} & T^{-\alpha/\beta}(V_{t/T^\alpha}\phi)(y/T) \\ &= T^{-\alpha/\beta}S_{t/T^\alpha}^\alpha\phi(y/T) \\ &\quad - \gamma\int_0^{t/T^\alpha} T^{-\alpha/\beta}S_{(t/T^\alpha)-s}^\alpha(V_s\phi)^{1+\beta}(y)ds \\ &= T^{-\alpha/\beta}S_{t/T^\alpha}^\alpha\phi(y/T) \\ &\quad - \gamma\int_0^t S_{(t/T^\alpha)-(s'/T^\alpha)}^\alpha[V_{s'/T^\alpha}\phi(y/T)]^{1+\beta}\frac{T^{-\alpha/\beta}}{T^\alpha}ds' \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= T^{-\alpha/\beta}(S^{\alpha}_{t/T^{\alpha}}\phi)(y/T) \\
&\quad - \gamma\int_0^t S^{\alpha}_{t-s'}[(T^{-\alpha/\beta}V_{s'/T^{\alpha}}\phi)^{1+\beta}(\cdot/T)](y)ds'.
\end{aligned}
$$

此外，$V_t(T^{-\alpha/d}\phi(\cdot/T))(y)$也满足上述方程，由解的唯一性得到(3.3.8). □

§3.4 缓增测度空间上的测度值过程

本节的主要目的是把$S(\alpha,d,\beta)$过程推广到p-缓增空间$M_p(\mathbb{R}^d)$上，并使之成为一个右连左极强 Markov 过程.

设$p>d$，当$\alpha<2$时还设$p<(d+\alpha)$①. 为了方便读者，这里简单重复一些记号.

$$
\phi_p(x):=\frac{1}{(1+\|x\|)^p}, x\in\mathbb{R}^d,
$$

$$
M_p(\mathbb{R}^d):=\left\{\mu\in M(\mathbb{R}^d):\int\phi_p(x)\mu(dx)<\infty\right\}.
$$

设$\dot{\mathbb{R}}^d:=\mathbb{R}^d\cup\{\infty\}$，$\{\infty\}$是孤立点. 把$\phi_p$延拓到$\dot{\mathbb{R}}^d$上并记为$\dot{\phi}_p$，$\dot{\phi}_p(\{\infty\})=1$. 定义

$$
M_p(\dot{\mathbb{R}}^d):=\left\{\mu\in M(\dot{\mathbb{R}}^d):\int\dot{\phi}_p(x)\mu(dx)<\infty\right\}, \tag{3.4.1}
$$

$$
C_p(\dot{\mathbb{R}}^d):=\{f\in C(\mathbb{R}^d\cup\{\infty\}):\lim_{|x|\to\infty}f(x)/\phi_p(x)\text{ 存在}\}. \tag{3.4.2}
$$

定义其上范数为$\|f\|_p:=\sup_x|f(x)|/\phi_p(x)$，$f\in C_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$. 注意，$C_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$与$K_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$在$M_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$上产生的拓扑是等价的.

$M_p(\mathbb{R}^d)$可等同于$\{\mu\in M_p(\dot{\mathbb{R}}^d), \mu(\{\infty\})=0\}$，并赋予它$C_p(\mathbb{R}^d)$上的拓扑. 同样若令$\{\infty\}$为随机过程的吸收点，半群$S_t^\alpha$也可延拓到$C_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$上，此时$S_t^\alpha f(\infty)=f(\infty)$，而且$|\triangle_\alpha\phi_p(x)|\leqslant \text{const}\,\phi_p(x)$.

---

① 为了保证$\int p_t^\alpha(x)\mu(dx)<\infty, t\geqslant 0, \mu\in M_p(\mathbb{R}^d)$.

为了构造所要的过程，我们重新回到分枝粒子系统．先找出$\mu_\epsilon(\in M_F(\dot{\mathbb{R}}^d))\uparrow\mu\in M_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$，并考虑相应的以$\mathscr{P}(\mu_\epsilon/\epsilon)$为初始测度的逼近分枝粒子系统．为了证明相应的概率律序列收敛，仅需证明它们在$M_1(D([0,\infty),M_p(\dot{\mathbb{R}}^d)))$中是相对紧的．

设$X^\epsilon(t,du)=\epsilon Z^\epsilon(t,du)$，这里$Z^\epsilon(t,du)$表示$\epsilon$-分枝粒子系统，$Z^\epsilon(0)$是强度为$\mu_\epsilon$的 Poisson 点过程，底过程是对称$\alpha$-稳定过程，分枝率为$\kappa^\epsilon(\xi,ds)=\gamma(1+\beta)\epsilon^{-\beta}ds$，于是相应的母函数为

$$\mathscr{G}^\epsilon(\lambda)=\lambda+(1+\beta)^{\ 1}(1-\lambda)^{1+\beta}. \tag{3.4.3}$$

先看如下不等式：

引理3.4.1 对于$0<\theta<\beta,T>0$，

$$E\sup_{t\leqslant T}\{\langle X_t^\epsilon,\phi_p\rangle^{1+\theta}\}\leqslant K(1+I(X_0^\epsilon))\leqslant K',\forall\ \epsilon\in(0,1), \tag{3.4.4}$$

其中$I(X_0^\epsilon):=\sup_{t\leqslant T}E(\langle X^\epsilon(0),S_t^\alpha\phi_p\rangle^{1+\beta}+\langle X^\epsilon(0),S_t^\alpha\phi_p\rangle)$，$K'$是不依赖$\epsilon$的常数．进一步，若$I(X_0^\epsilon)<1$，则

$$E\sup_{t\leqslant T}\{\langle X^\epsilon(t),\phi_p\rangle^{1+\theta}\}\leqslant \mathrm{const}(I(X_0^\epsilon))^{1+\theta/(1+\beta)}. \tag{3.4.5}$$

证明 对于任何随机变量ξ，先证两个基本事实：

$(1)E\xi^{1+\theta}\leqslant 1+(1+\theta)\int_1^\infty r^\theta P(\xi>r)dr$；

$(2)P(\xi>r)\leqslant \mathrm{const}\ r\int_0^{2/r}[L(u)-1-uL'(0)]du$，

其中$L(u)=Ee^{-\xi u}$，$|L'(0)|<\infty,\xi\geqslant 0$．

至于(1)，利用$x^{1+\theta}-1=(1+\theta)\int_1^x r^\theta dr$，则有

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty x^{1+\theta}dP(\xi\leqslant x)\\ &\quad=1-\int_0^\infty(1+\theta)\int_1^x r^\theta dr dP(\xi\leqslant x)\\ &\quad\leqslant 1+\int_1^\infty(1+\theta)\int_1^x r^\theta dr dP(\xi\leqslant x)\\ &\qquad\quad(x<1\text{ 时，第二个积分为负})\\ &\quad=1+\int_1^\infty(1+\theta)x^\theta dP(\xi>x)(\text{分步积分}).\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

对于(2),

$$r\int_0^{2/r}[L(u)-1-uL'(0)]du$$

$$=r\int_0^{2/r}\left[\int[e^{-ux}-1+ux]dP(\xi\leqslant x)\right]du$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{r}{x}\left[1-e^{-2x/r}-2x/r+\frac{1}{2}(2x/r)^2\right]dP(\xi\leqslant x)$$

(交换积分次序)

$$\geqslant\int_r^{\infty}\frac{r}{x}\left[1-e^{-2x/r}-2x/r+\frac{1}{2}(2x/r)^2\right]dP(\xi\leqslant x)$$

$$\geqslant \text{const } P(\xi\geqslant r). \tag{3.4.7}$$

现在来证明引理. 由(1)和(2),

$$E\{\langle X^\varepsilon(t),\phi_p\rangle^{1+\beta}|X^\varepsilon(0)\}$$

$$\leqslant 1+\text{const}\int_1^{\infty}dr\left\{r^\beta\int_0^{2/r}duE[\exp(-\langle X^\varepsilon(t),u\phi_p\rangle)\right.$$

$$\left.-1+\langle X^\varepsilon(t),u\phi_p\rangle]|X^\varepsilon(0)\right\}. \tag{3.4.8}$$

注意到不等式$0\leqslant e^{-x}-1+x\leqslant\text{const } x^{1+\beta}, x\geqslant 0, 0<\beta\leqslant 1$, 以及在此分枝机制下,

$$E\{\langle X^\varepsilon(t),f\rangle|X^\varepsilon(0)\}=\langle X^\varepsilon(0),S_t^\alpha f\rangle,$$

$$\forall\, t>0, f\in b\mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \tag{3.4.9}$$

(3.4.8)中被积函数

$$E\{\exp(-\langle X^\varepsilon(t),u\phi_p\rangle)-1+\langle X^\varepsilon(t),u\phi_p\rangle|X^\varepsilon(0)\}$$

$$=\exp(-\langle X^\varepsilon(0),V_t^\varepsilon(u\phi_p)\rangle)-1+\langle X^\varepsilon(0),S_t^\alpha(u\phi_p)\rangle$$

$$\leqslant\text{const }\langle X^\varepsilon(0),S_t^\alpha\phi_p\rangle^{1+\beta}u^{1+\beta}$$

$$-e^{-\langle X^\varepsilon(0),uS_t^\alpha\phi_p\rangle}+e^{-\langle X^\varepsilon(0),V_t^\varepsilon(u\phi_p)\rangle}$$

$$\leqslant\text{const }\langle X^\varepsilon(0),S_t^\alpha\phi_p\rangle^{1+\beta}u^{1+\beta}$$

$$-\langle X^\varepsilon(0),|uS_t^\alpha(\phi_p)-V_t^\varepsilon(u\phi_t)|\rangle.$$

而

$$V_t^\varepsilon(u\phi)=S_t^\alpha\left(\frac{1-e^{-\varepsilon u\phi}}{\varepsilon}\right)-\gamma\int_0^t S_{t-s}^\alpha[V_s^\varepsilon(u\phi)]^{1+\beta}ds, \tag{3.4.10}$$

则

$$|S_t^\alpha(u\phi)-V_t^\alpha(u\phi)|$$

$$\leqslant |S_t^\alpha(u\phi) - S_t^\alpha(\varepsilon^{-1}(1-e^{-\varepsilon u\phi}))|$$
$$+ |V_t^\varepsilon(u\phi) - S_t^\varepsilon(\varepsilon^{-1}(1-e^{-\varepsilon u\phi}))|$$
$$\leqslant \text{const}\varepsilon^\beta u^{1+\beta} S_t^\alpha \phi$$
$$+ \gamma \int_0^t S_{t-s}^\alpha [S_s^\alpha(\varepsilon^{-1}(1-e^{-\varepsilon u\phi}))]^{1+\beta} ds$$
$$\leqslant \text{const}(S_t^\alpha \phi) u^{1+\beta}. \tag{3.4.11}$$

因此

$$E(\exp\{-\langle X^\varepsilon(0), V_t^\varepsilon(u\phi_p)\rangle\} - 1 + \langle X^\varepsilon(0), uS_t^\alpha\phi_p\rangle)$$
$$\leqslant \text{const } u^{1+\beta} E(\langle X^\varepsilon(0), S_t^\alpha \phi_p\rangle^{1+\beta}$$
$$+ \langle X^\varepsilon(0), S_t^\alpha \phi_p\rangle). \tag{3.4.12}$$

由于 $S_t^\alpha\phi_p \leqslant \text{const}\phi_p$，我们得到

$$E(\langle X^\varepsilon(t), \phi_p\rangle^{1+\theta})$$
$$\leqslant 1 + \text{const}\int_1^\infty dr\left[r^{1+\theta}\int_0^{2/r} u^{1+\beta} du\right] I(X_0^\varepsilon)$$
$$\leqslant 1 + \text{const}\int_1^\infty \frac{r^{1+\theta}}{r^{2+\beta}} dr I(X_0^\varepsilon)$$
$$< \text{const} I(X_0^\varepsilon), \tag{3.4.13}$$

当$0<\theta<\beta$. 由(3.3.2)知，我们考虑的分枝粒子系统是临界的，容易证明

$$M_\varepsilon(t) := \langle X^\varepsilon(t), \phi_p\rangle - \int_0^t \langle X^\varepsilon(s), \triangle_\alpha \phi_p\rangle ds \tag{3.4.14}$$

是 $P^Z_{\mathscr{P}(\mu_\varepsilon/\varepsilon)}$-鞅. 于是，

$$E \sup_{t\leqslant T}\{\langle X^\varepsilon(t), \phi_p\rangle^{1+\theta}\}$$
$$\leqslant \text{const}\left(E\sup_{t\leqslant T}|M_\varepsilon(t)|^{1+\theta} + E\left[\int_0^T \langle X^\varepsilon(t), |\triangle_\alpha \phi_p|\rangle dt\right]^{1+\theta}\right)$$
$$\leqslant \text{const } (E|M_\varepsilon(T)|^{1+\theta} + \sup_{t\leqslant T}) E\{\langle X^\varepsilon(t), \phi_p\rangle^{1+\theta}\})$$

(由 Doob 鞅不等式、Jensen 不等式和 $|\triangle_\alpha\phi_p| \leqslant C\phi_p$)

$$\leqslant \text{const } \sup_{t\leqslant T} E\{\langle X^\varepsilon(t), \phi_p\rangle^{1+\theta}\} \text{(再对时间 } T \text{ 重复上述计算)}$$
$$\leqslant 1 + \text{const} I(X_0^\varepsilon) < \infty, \text{如果 } 0<\theta<\beta. \tag{3.4.15}$$

由于 $X^\varepsilon(0) = \mathscr{P}(\mu_\varepsilon/\varepsilon)$且在 $M_p(\hat{\mathbb{R}}^d)$中 $\mu_\varepsilon \to \mu$，因此(3.4.15)左端

由一个不依赖于 ε 的常数控制. 这证明了(3.4.4),而(3.4.5)只需把(3.4.4)中的 ϕ_t 换成 $\phi_p/(I(X_0^\varepsilon))^{1/(1+\beta)}$ 即得. □

定理3.4.2 (a)在 $P^Z_{r,\mathscr{P}(\mu_\varepsilon/\varepsilon)}$ 下如果 $\mu_\varepsilon\to\mu\in M_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$,则粒子系统序列 $\{X_t^\varepsilon(t,\cdot)\}$ 弱收敛于一个右连左极 $M_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$-值过程,其 Laplace 泛函为

$$P_\mu(e^{-\langle X(t),\phi\rangle}) = \exp\left(-\int v_t(x)\mu(dx)\right), \qquad (3.4.16)$$

$\mu\in M_p(\mathbb{R}^d)$,$\phi\in C_p(\mathbb{R}^d)$,其中 v_t 满足如下非线性发展方程:

$$\begin{cases}\partial v_t(x)/\partial t = \triangle_\alpha v_t(x) - \gamma v_t^{1+\beta}(x),\\ v_0(x) = \phi(x)\in C_p(\mathbb{R}^d).\end{cases} \qquad (3.4.17)$$

(b)如果 $\mu(\{\infty\})=0$,则 $\sup_t X(t,\{\infty\})=0$,P_μ-a.s.

(c)如果 $\mu\in M_p(\mathbb{R}^d)$,则 X 是 a.s. 右连左极(相对于 $C_P(\mathbb{R}^d)$ 在 $M_p(\mathbb{R}^d)$中产生的拓扑).

证明 (a)X^ε 的有限维分布的 Laplace 泛函收敛性前面已经证明,而相应有限维分布的收敛性可由一阶矩测度的胎紧性得到. 因此我们只需证明过程 X^ε 在 $D([0,\infty),M_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$中的胎紧性.

令 $\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$. 根据定据1.8.1,为证过程 $\{X^{\varepsilon_n}\}$ 的胎紧性,只需证明对于每一 $\phi\in K_p(\mathbb{R}^d)$,实值过程簇 $\{Z_n(t):=\langle X^{\varepsilon_n}(t),\phi\rangle;n\in Z_+\}$ 在 $D([0,\infty),\mathbb{R})$中胎紧. 应用 Aldous 条件(定理1.7.5)仅需证明对于任一收敛于0的常数列 δ_n 及任一有界停时列 $\tau_n\leqslant T$(相对于过程 Z_n 的规范过滤),当 $n\to\infty$时在分布意义下有

$$Z_n(\tau_n+\delta_n) - Z_n(\tau_n)\to 0. \qquad (3.4.18)$$

对过程 X^{ε_n}应用强 Markov 性,对于 $r,s\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}L_n(\delta_n,s,r) &:= E(\exp\{-sZ_n(\tau_n+\delta_n) - rZ_n(\tau_n)\})\\ &= E(\exp\{\langle -X^{\varepsilon_n}(\tau_n),v^\varepsilon_{\delta_n}(S\phi)+v^\varepsilon_0(r\phi)\rangle\}),\end{aligned}$$

其中$\{v_t^{\varepsilon_n}(s\phi):t\geqslant 0\}$满足方程(3.2.24),但要以 $S\phi$ 代替 ϕ. 因此

$$\begin{aligned}&|L_n(0,s,r) - L_n(\delta_n,s,r)|\\ &\leqslant \|v^\varepsilon_{\delta_n}(s\phi) - v^\varepsilon_0(s\phi)\|_p E\{\sup_{t\leqslant T}\langle X^{\varepsilon_n}(t),\phi_p\rangle\}\\ &\leqslant \mathrm{const}\|v^\varepsilon_{\delta_n}(s\phi,\delta_n) - v^\varepsilon_0(s\phi)\|_p(\text{由引理 } 3.4.1).\end{aligned}$$

引理3.2.8说明 $\|v^{\epsilon}_{\delta_n}(s\phi) - v^{\epsilon}_{0}(s\phi)\|_p \to 0 (n\to\infty)$. 所以

$$|L_n(0,s,r) - L_n(\delta_n,s,r)| \to 0.$$

从而由引理3.4.1可知序列 $\{Z_n(\tau_n+\delta_n), Z_n(\tau_n)\}$ 胎紧.

考虑一个子列 $\{n_k\}$ 使得 $\{Z_{n_k}(\tau_{n_k}+\delta_{n_k}), Z_{n_k}(\tau_{n_k})\}$ 依分布收敛. 由于 $|L_n(0,s,r)-L_n(\delta_n,s,r)|\to 0$, 我们断定此极限分布具有形式 $\{Z_\infty, Z_\infty\}$. 这就说明 $Z_n(\tau_n+\delta_n)-Z_n(\tau_n)\xrightarrow{d} 0 (n\to\infty)$, 从而完成了胎紧性的证明.

(b)仅需证明对于所有 $\delta>0, T>0$, 对于某些 $0<\theta<\beta$,

$$\lim_{K\to\infty}\sup_n E\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\int_{|x|>K}\phi_p(x)X^{\epsilon_n}(t,dx)\right)^{1+\theta} < \delta.$$

由分枝粒子系统的性质我们有

$$P_{\mathscr{P}(\mu_\epsilon/\epsilon)} = P_{\mathscr{P}(\mu_{1,\epsilon}/\epsilon)} * P_{\mathscr{P}(\mu_{2,\epsilon}/\epsilon)} (* \text{ 表示卷积}),$$

其中 $\mu_{1,\epsilon}=\mu_\epsilon 1(|x|<K)$, $\mu_{2,\epsilon}=\mu_\epsilon 1(|x|\geqslant K)$. 以 $X^{1,\epsilon}, X^{2,\epsilon}$ 分别表示对应于初始测度 $\mathscr{P}(\mu_{1,\epsilon}/\epsilon)$, $\mathscr{P}(\mu_{2,\epsilon}/\epsilon)$ 的粒子系统. 注意到 $0<\theta<\beta$, 则

$$\begin{aligned}
&\sup_{0<\epsilon<1} E\{\sup_{t\leqslant T}\langle X^{2,\epsilon}(t), \phi_p 1(|x|\geqslant K)\rangle^{1+\theta}\} \\
&\leqslant \sup_{0<\epsilon<1} E\{\sup_{t\leqslant T}\langle X^{2,\epsilon}(t), \phi_p\rangle^{1+\theta}\} \\
&\leqslant \text{const}\sup_{0<\epsilon<1}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E\{\langle X^{2,\epsilon}(0), S^\alpha_t\phi_p\rangle^{1+\beta} \\
&\qquad + \langle X^{2,\epsilon}(0), S^\alpha_t\phi_p\rangle\}\}^{(1+\theta)/(1+\beta)}.
\end{aligned}$$

最后的不等式由(3.4.4)得到.

由于 $\mu_\epsilon\to\mu$ 及 $\mu(\{\infty\})=0$, 给定 $\delta>0$ 可选取足够大的 K, 使得上式最后一项小于 $\delta/2$. 同样对于 $0<p'<p$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{0<\epsilon<1} E\sup_{t\leqslant T}\{\langle X^{1,\epsilon}(t), \phi_p 1(|x|>K)\rangle^{1+\theta}\} \\
&\leqslant (1+K)^{-(p-p')(1+\theta)}\sup_{0<\epsilon<1} E\sup_{t\leqslant T}\{\langle X^{1,\epsilon}(t), \phi_{p'}\rangle^{1+\theta}\} \\
&\leqslant \text{const}(1+K)^{-(p-p')(1+\theta)}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E\{\langle X^{1,\epsilon}(0), S^\alpha_t\phi_{p'}\rangle^{1+\beta} \\
&\qquad + \langle X^{1,\epsilon}(0), S^\alpha_t\phi_{p'}\rangle\}\}^{(1+\theta)/(1+\beta)}.
\end{aligned}$$

因此也可选取 K 足够大使得上式也小于 $\delta/2$. 这就证明了结论

(b). (c)在(b)的讨论中已经证明了相对于$C_p(\mathbb{R}^d)$-拓扑，Prohorov胎紧性的条件. 定理证毕. □

注3.4.3 以(A,Ψ)-**超过程**表示距离空间E上以A为无穷小算子的底过程，分枝机制$\Psi(x,\lambda)=\gamma\lambda^{1+\beta}$，分枝率$\kappa(ds)=ds$对应的$M_F(E)$-值超过程. 上述定理对$(A,\Psi)$-超过程也成立. 实际上，当$E$是紧距离空间时，定理3.4.2中胎紧性的证明还可以简化. 当E是Polish空间时，在验证Jakubowski准则第一个条件时需要新的讨论；当A的定义域包含一个收敛决定类时，第二个条件可同定理3.4.2之证明. 具体细节，留给读者. □

考虑在正线性组合下封闭的$pC_p(\mathbb{R}^d)$的子集$D_0(\triangle_\alpha,p)$. 假定它构成$C_p(\mathbb{R}^d)$上半群S_t^α的核，于是，我们可把$D_0(\triangle_\alpha,p)$中的函数延拓到$C_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$上. 令

$$\dot{f}(\{\infty\}) := \lim_{|x|\to\infty} f(x)/\phi_p(x) \tag{3.4.19}$$

及$S_t^\alpha\dot{f}(\{\infty\})=\dot{f}(\{\infty\})$，$\forall\ t\geqslant 0$，$\forall\ f\in C_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$.

设$\{T_t,t\geqslant 0\}$是$S(\alpha,d,\beta)$在$C_0(M_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$上的半群，它可由下列方式定义. 以$\mathscr{D}_0(G)$表示$M_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$上形如

$$F(\mu) = \exp\{-[\langle\mu,\dot{\phi}+\theta\langle\mu,\dot{\phi}_p\rangle]\},\phi\in D_0(\triangle_\alpha,p),\theta>0 \tag{3.4.20}$$

的函数类. 易证$\mathscr{D}_0(G)$在$C_0(M_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$中稠. 对于函数$F\in\mathscr{D}_0(G)$，

$$\begin{aligned}T_tF(\mu) &:= E(F(X_t)\,|\,X(0)=\mu)\\ &= \exp\{-[\langle\mu 1_{\mathbb{R}^d},V_t(\phi+\theta\phi_p)\rangle+\theta\mu(\{\infty\})]\}.\end{aligned}$$

由此推出若$F(\mu)=f(\mu(\{\infty\}))$则$T_tF(\mu)=F(\mu)$，$\forall\ t\geqslant 0$，即在$\{\infty\}$点没有分枝发生.

命题3.4.4

(a)半群$\{T_t;t\geqslant 0\}$在$C_0(M_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$上是Feller的.

(b)过程$\{X_t,t\geqslant 0\}$是强Markov的.

证明 (a)由定理3.4.2可知$\{T_t\}$是$b\mathscr{B}(M_p(\dot{\mathbb{R}}^d)))$上的压缩

半群. 剩下要证 $T_t:C_0(M_p(\dot{\mathbb{R}}^d))\to C_0(M_p(\dot{\mathbb{R}}^d))$. 为此只需证明对 $F\in\mathscr{D}_0(G)$, $\mu_n\in M_p(\dot{\mathbb{R}}^d)\to\mu(\neq\infty)\in M_p(\dot{\mathbb{R}}^d)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}T_tF(\mu_n)=T_tF(\mu)$$

即可. 由 Feymann-Kac 公式及初等计算,

$$\lim_{|x|\to\infty}V_t\phi_p(x)/\phi_p(x)=\lim_{|x|\to\infty}S_t^c\phi_p(x)/\phi_p(x)=1,$$

并注意到分析结果 $V_t:C_p(\mathbb{R}^d)\to C_p(\mathbb{R}^d)$, $V_t\phi_p\leqslant\text{const}\phi_p$ 可知

$$\lim_{n\to\infty}T_tF(\mu_n)=0, \text{当 } \phi=\phi_p \text{ 及 } \mu_n\to\{\infty\}.$$

由此即得所要结论.

(b)过程的强 Markov 性由 Feller 性即得. 详细证明参见文献[164], p. 217. □

§3.5 超过程的矩

矩是研究随机过程的前提. 因此, 最好的设想是给出所有矩公式. 然而这有时是不现实的. 对于超过程, 我们首先面临的问题是, 什么时候矩存在?矩与底过程、分枝特征有何关系?

Dynkin(1989)[39], 王梓坤(1990)[206]等针对二分枝的情况, 利用 Taylor 级数展开的思想, 给出了各阶矩公式. 随后, Dynkin(1991)[42,43]对于更一般的分枝特征研究了超过程的高阶矩. 本节系统讨论超过程的矩.

为简单起见, 考虑超过程是时间齐次的①. 为此, 假设底过程是时齐的, 其半群记为 S_t, 分枝率为 $\kappa(ds)=ds$, 分枝机制为

$$\Psi(x,\lambda)=b(x)\lambda+c(x)\lambda^2+\int_0^\infty(e^{-u\lambda}-1+u\lambda)\nu(x,du). \qquad (3.5.1)$$

其中 $c\geqslant0$, b 为 E 上有界可测函数; $\nu(x,du)$ 为 $(0,\infty)$ 上的测度, 并且对于任意固定的 $A\in\mathscr{E}$, $\nu(\cdot,A)$ 是 E 上的可测函数, 而且有

$$\sup_{x\in E}\int_0^\infty u\wedge u^2\nu(x,du)<\infty. \qquad (3.5.2)$$

① 时间非齐次的情况, 可类似讨论.

若记底过程为$(\xi_t, t\geqslant 0, P_x)_{x\in E}$，相应的超过程记为$(X_t, t\geqslant 0, P^\mu)_{\mu\in M_F(E)}$. 前面已证，超过程是存在唯一的，其 Laplace 泛函为

$$P^\mu e^{-\langle X_t, f\rangle} = e^{-\langle \mu, V_t f\rangle}, f \in pbC(E), \tag{3.5.3}$$

而 $V_t f$ 满足如下积分方程：

$$V_t f(x) = S_t f(x) - \int_0^t S_s \Psi(\cdot, V_{t-s} f(\cdot)) ds. \tag{3.5.4}$$

定理3.5.1 在(3.5.2)条件下，超过程的一阶矩存在，并由下式给出

$$P^\mu \langle X_t, f\rangle = \langle \mu, S_t^b f\rangle, f \in b\mathscr{B}(E), \tag{3.5.5}$$

其中 $S_t^b f(x) = P_x e^{-\int_0^t b(\xi_s)ds} f(\xi_t)$. 若进一步假设

$$\sup_{x\in E} \int_1^\infty u^2 \nu(x, du) < \infty, \tag{3.5.6}$$

则超过程的二阶矩存在，且对于$\forall\ f\in bp\mathscr{B}(E)$，

$$P^\mu \langle X_t, f\rangle^2 = \langle \mu, S_t^b f\rangle^2 \tag{3.5.7}$$

$$+ \left\langle \mu, C_t(\cdot) - P_\cdot \int_0^t ds\, b(\xi_{t-s}) C_s(\xi_{t-s}) e^{-\int_s^t b(\xi_{t-u})du} \right\rangle,$$

其中

$$C_t(\cdot) := \int_0^t S_s \left[2c(\cdot) + \int_0^\infty u^2 \nu(\cdot, du)\right] (S_{t-s}^b f(\cdot))^2 ds, t > 0.$$

证明 在假设(3.5.1)与(3.5.2)之下，(3.5.3)和(3.5.4)都是有意义的. 首先考虑 $f\in pb\mathscr{B}(E)$的情况，设 $\lambda>0$，在(3.5.4)中以 λf 代替 f，则

$$V_t(\lambda f) = S_t(\lambda f) - \int_0^t S_s \Psi(\cdot, V_{t-s}(\lambda f)(\cdot)) ds. \tag{3.5.8}$$

上式两端对 λ 求导，并经整理即得

$$\frac{d}{d\lambda} V_t(\lambda f) = S_t f - \int_0^t S_s \left\{ \left[b + 2c V_{t-s}(\lambda f) \right.\right. \tag{3.5.9}$$

$$\left.\left. + \int_0^\infty u(1 - e^{-u V_{t-s}(\lambda f)}) \nu(\cdot, du) \right] \frac{d}{d\lambda} V_{t-s}(\lambda f) \right\} ds.$$

由于 f 非负有界，$V_t f$ 也是非负有界的. 从而由假设(3.5.2)知，

$$\int_0^\infty u(1 - e^{-u V_{t-s}(\lambda f)}) \nu(\cdot, du)$$

为有界可测函数. 因此,同方程(3.2.10)解的存在唯一性的证明,方程(3.5.9)也有唯一解. 这就说明上面的求导是有意义的. 注意到 $V_t(\lambda f)|_{\lambda=0}\equiv 0$,并在(3.5.9)中取 $\lambda=0$,则有

$$\frac{d}{d\lambda}V_t(\lambda f)|_{\lambda=0}+\int_0^t S_s\Big[b\frac{d}{d\lambda}V_{t-s}(\lambda f)|_{\lambda=0}\Big]ds=S_tf. \quad (3.5.10)$$

再由 Feynman-Kac 公式[①],方程(3.5.10)的唯一解为

$$\frac{d}{d\lambda}V_t(\lambda f)|_{\lambda=0}=S_t^bf. \quad (3.5.11)$$

又由(3.5.3)可得

$$\begin{aligned}P^\mu\langle X_t,f\rangle &=\frac{d}{d\lambda}P^\mu e^{-\langle X_t,\lambda f\rangle}|_{\lambda=0}\\ &=\frac{d}{d\lambda}e^{-\langle\mu,V_t(\lambda f)\rangle}|_{\lambda=0}\\ &=e^{-\langle\mu,V_t(\lambda f)\rangle}|_{\lambda=0}\Big\langle\mu,\frac{d}{d\lambda}V_t(\lambda f)|_{\lambda=0}\Big\rangle\\ &=\langle\mu,S_t^bf\rangle.\end{aligned}$$

对 $f\in b\mathscr{B}(E)$,由上式易得(3.5.5). 往证(3.5.7),我们注意到在条件(3.5.6)之下,再对(3.5.9)式两边对 λ 求导得

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{d\lambda^2}V_t(\lambda f)+\int_0^t S_s\Big\{\Big[b+2cV_{t-s}(\lambda f)\\ &\qquad+\int_0^\infty u(1-e^{-uV_{t-s}(\lambda f)})\nu(\cdot,du)\Big]\frac{d^2}{d\lambda^2}V_{t-s}(\lambda f)\Big\}ds\\ &\qquad+\int_0^t S_s\Big\{\Big[2c+\int_0^\infty u^2e^{-uV_{t-s}(\lambda f)}\nu(\cdot,du)\Big]\\ &\qquad\quad\Big(\frac{d}{d\lambda}V_{t-s}(\lambda f)\Big)^2\Big\}ds\\ &=0. \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

由于 $\frac{d}{d\lambda}V_t(\lambda f)$ 也是有界非负可测函数,因此方程(3.5.12)也存在唯一解 $\frac{d^2}{d\lambda^2}V_t(\lambda f)$. 取 $\lambda=0$,令 $u_t(x):=\frac{d^2}{d\lambda^2}V_t(\lambda f)(x)|_{\lambda=0}$,则

① 可以由(3.5.16)得到.

(3.5.12)可化为

$$u_t + \int_0^t S_s b u_{t-s} ds + \int_0^t S_s\left[2c + \int_0^\infty u^2 \nu(\cdot, du)\right](S_{t-s}^b f)^2 ds = 0$$

(3.5.13)

由于 b, c 有界，ν 满足(3.5.6)，同前讨论可知，u_t 非正，而且

$$\|u_t\| \leqslant \|C_t\| \leqslant \text{const}\|f|^2 t. \qquad (3.5.14)$$

然而对(3.5.13)不能直接应用 Feynman-Kac 公式. 为此，采用如下的初等方法. 首先，由(3.5.13)进行迭代并由 Markov 性，对 $n>1$

$$u_t(x) = -C_t(x) + P_x\Big[\int_0^t dt_1 b(\xi_{t-s_1}) C_{s_1}(\xi_{t-s_1}) + \cdots$$

$$+ (-1)^{n+1}\int_0^t ds_1 b(\xi_{t-s_1})\int_0^{s_1} ds_2 b(\xi_{t-s_2})\cdots$$

$$\int_0^{s_{n-1}} ds_n b(\xi_{t-s_n}) C_{sn}(\xi_{t-s_n})\Big] + R_n(t,x), \qquad (3.5.15)$$

其中

$$R_n(t,x) := (-1)^{n+1} P_x \int_0^t ds_1 b(\xi_{t-s_1})\int_0^{s_1} ds_2 b(\xi_{t-s_2})\cdots$$

$$\int_0^{s_{n-1}} ds_n b(\xi_{t-s_n}) u_{t_n}(\xi_{t-s_n}).$$

(3.5.14)推出：

$$|R_n(t,x)| \leqslant \text{const}\frac{(\|b\|t)^n}{n!} \to 0 \text{ 当 } n\to\infty.$$

于是令 $n\to\infty$，则(3.5.15)化为

$$u_t(x) = -C_t(x) + P_x\Big[\int_0^t dt_1 b(\xi_{t-s_1}) C_{s_1}(\xi_{t-s_1}) + \cdots$$

$$+ (-1)^{n+1}\int_0^t ds_1 b(\xi_{t-s_1})\int_0^{s_1} ds_2 b(\xi_{t-s_2})\cdots$$

$$\int_0^{s_{n-1}} ds_n b(\xi_{t-s_n}) C_{s_n}(\xi_{t-i_n}) + \cdots\Big]$$

$$= -C_t(x) + P_x\int_0^t ds b(\xi_{t-s}) C_s(\xi_{t-s})\Big[1 - \int_s^t ds_1 b(\xi_{t-s_1})$$

$$+\cdots-(-1)^n\int_s^t ds_1 b(\xi_{t-s_1})\int_s^{s_1} ds_2 b(\xi_{t-s_2})\cdots$$

$$\left.\int_s^{s_{n-1}} ds_n b(\xi_{t-s_n})+\cdots\right]$$

$$=-C_t(x)+P_x\int_0^t dsb(\xi_{t-s})C_s(\xi_{t-s})\left[1-\int_s^t b(\xi_{t-u})du+\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^n\frac{\left(\int_s^t b(\xi_{t-u})du\right)^n}{n!}+\cdots\right] \tag{3.5.16}$$

$$=-C_t(x)+P_x\int_0^t dsb(\xi_{t-s})C_s(\xi_{t-s})e^{-\int_s^t b(\xi_{t-u})du}.$$

于是，

$$P^\mu\langle X_t,f\rangle^2=\frac{d^2}{d\lambda^2}e^{-\langle\mu,V_t(\lambda f)\rangle}|_{\lambda=0}$$

$$=\left\langle\mu,\frac{d}{d\lambda}V_t(\lambda f)|_{\lambda=0}\right\rangle^2-\left\langle\mu,\frac{d^2}{d\lambda^2}V_t(\lambda f)|_{\lambda=0}\right\rangle$$

$$=\langle\mu,S_t^b f\rangle^2+\langle\mu,C_t(\cdot)$$

$$-P\int_0^t dsb(\xi_{t-s})C_s(\xi_{t-s})e^{-\int_s^t b(\xi_{t-u})du}\rangle. \tag{3.5.17}$$

这就证明了(3.5.7)．

由定理3.5.1，我们有

系3.5.2 若 $b\equiv0,\nu\equiv0$，则 $f\in p\mathscr{B}(E)$，

$$P^\mu\langle X_t,f\rangle=(\mu,S_tf); \tag{3.5.18}$$

$$P^\mu\langle X_t,f\rangle^2$$

$$=\langle\mu,S_tf\rangle^2+\left\langle\mu,\int_0^t dsS_s(2(S_{t-s}f)^2c)\right\rangle. \tag{3.5.19}$$

注3.5.3 若没有分枝现象发生(即 $\Psi\equiv0$)，则相应的超过程是非随机的测度流．事实上，若初始测度为 μ，相应过程的时刻 $t\geqslant0$ 的值由泛函 $\langle\mu,S_tf(\cdot)\rangle$，$f\in pbC(E)$ 唯一决定．

注3.5.4 当 $b=0$ 时，式(3.5.5)给出了超过程与底过程的之间的一个简单关系．Dynkin 基于这种关系引出超过程的概念，见[41]．

注3.5.5 定理3.5.1给出了超过程一、二阶矩存在的充分条件.反过来,这些条件是否必要?对此还没有看到一个肯定的答案.然而,可以相信超过程的矩与测度 ν 有密切关系.Dynkin[42]在假设 $\int_1^\infty u^m\nu(\cdot,du)$ 一致有界的条件下,给出了超过程的 m-阶矩($m\in N$).反过来,若超过程的 m-阶矩存在,是否测度 ν 也满足上述条件?对于初学者来说,这是能够研究的问题,但这并不意味着问题简单.通过这些问题的讨论,对超过程的理解将有很大的帮助.

命题3.5.6 设分枝率为 $\kappa(dt)=dt$,分枝机制为 $\Psi(x,\lambda)=\gamma\lambda^{1+\beta}$,$\gamma>0$,$0<\beta<1$,则相应的超过程的一阶矩存在,并由(3.5.18)给出,但二阶矩及二阶以上矩都是无限的.

证明 由注3.3.2易知相应的分枝机制满足(3.5.2),则超过程的一阶矩存在且由(3.5.18)给出.同样,(3.5.6)不成立.重复上述讨论可知,二阶及其以上矩是无限的. □

通过上面的讨论,我们看到测度 ν 非零破坏了相应超过程的高阶矩的存在性,下面考虑 $\nu\equiv0$ 的情况.为简单起见,我们再设 $b\equiv0$,否则也可类似进行讨论,这时分枝特征即化为 $\Psi(x,\lambda)=c(x)\lambda^2$.王梓坤在[206]中给出了当 c 是常数时所有矩的表示.下面,对于 c 是有界非负可测函数,我们来考虑超过程的各阶矩.

对于 $\phi_t,\psi_t\in pb\mathscr{B}(E)$,$t>0$,定义卷积

$$(\phi*\psi)_t=\int_0^t S_s(2c\phi_{t-s}\psi_{t-s})ds. \tag{3.5.20}$$

设已给 $f\in pb\mathscr{B}(E)$,令 $\phi_t^{1*}:=\phi_t\equiv S_tf$,$\phi_t^{n*}:=\sum_{k=1}^{n-1}(\phi^{k*}*\phi^{(n-k)*})_t$,$\Phi_n(t)=\langle\mu,\phi_t^{n*}\rangle$.

定理3.5.7 假设 $b\equiv0$,$\nu\equiv0$.任意固定 $T>0$,当 $|\lambda|<R:=1/(8T\|f\|\|c\|)$,有

$$P^\mu\exp\{-\lambda\langle X_t,f\rangle\}=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n b_n(t)\lambda^n,0\leqslant t\leqslant T, \tag{3.5.21}$$

其中级数的收敛半径为 R,$b_0(t)=1$,

$$b_n(t) = \sum_{k=1}^{n} k\Phi_k(t) b_{n-k}(t)/n.$$

证明 简记 $V_t = V_t(\lambda f)$，改写(3.5.8)为算子方程

$$V_t = -(V * V)_t + \lambda\phi_t. \tag{3.5.22}$$

经迭代，其形式解为

$$V_t = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \phi_t^{n*} \lambda^n. \tag{3.5.23}$$

今证当 $|\lambda| < R$ 时此级数收敛，从而它确是(3.5.22)之解. 以 B_n 表示 ϕ^{n*} 中所含之项数. 易知，$B_1 = B_2 = 1$，而

$$B_n = \sum_{k=1}^{n-1} B_k B_{n-k}. \tag{3.5.24}$$

由于 $\|\phi_t^{n*}\| \leqslant B_n (2\|c\| t)^{n-1} \|\phi\|^n$，$0 \leqslant t \leqslant T$，而且 $\|\phi_t\| \leqslant \|f\|$，故(3.5.23)中级数被

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n (2\|c\| t)^{n-1} \|f\|^n \lambda^n \tag{3.5.25}$$

所控制. 为确定上述级数的收敛半径，考虑辅助函数 $g(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4\theta})$. 注意到，$g(\theta) = \theta + g^2(\theta)$，$g'(0) = 1$，将 $g(\theta)$ 的幂级数展式代入此式，即知其系数应满足(3.5.24)，而它又唯一决定 $\{B_n\}$，故有

$$g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \theta^n. \tag{3.5.26}$$

显然上述级数的收敛半径是 $\frac{1}{4}$，从而 $\overline{\lim}_{n\to\infty} (B_n)^{\frac{1}{n}} = 4$. 于是控制级数(3.5.25)之收敛半径为 $R > 0$，(3.5.23)中的级数也因而在 $(-R, R)$ 中绝对、局部一致收敛. 于是

$$\begin{aligned} P^{\mu} \exp\{-\lambda\langle X_t, f\rangle\} &= \exp\{-\langle \mu, V_t(\lambda f)\rangle\} \\ &= \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \langle \mu, \phi_t^{n*}\rangle \lambda^n\right\} \\ &= \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Phi_n(t) \lambda^n\right\} \end{aligned}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n(t)\lambda^n, \qquad (3.5.27)$$

而 b_n 的值由比较系数即知，且级数的收敛半径经指数变换后保持不变，定理证毕.

由上述定理，我们有

定理3.5.8 $M_n(t)=P^\mu\langle X_t,f\rangle^n(n=1,2,\cdots,)$存在，并可由下列递推式依次给出：

$$M_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(n-k)!\Phi_{n-k}(t)M_k(t), \qquad (3.5.28)$$

其中约定 $M_0=1$，$\binom{n-1}{0}=1$. 矩唯一决定$\langle X_t,f\rangle$的分布.

证明 由于(3.5.21)的收敛半径大于0，故各阶矩存在且唯一决定分布（参见文献[68]，p.234）. 而(3.5.28)由(3.5.21)并比较系数即得. □

§3.6 增广超过程

§3.2构造了(ξ,κ,Ψ)-超过程$(X_t,t\geqslant r,P^{r,\mu})_{\mu\in M_F(E)}$. 设 $\mathscr{T}=\{\xi$ 的所有有限停时类$\}$. 由于 $t\geqslant 0$是停时，那么$[0,\infty)\subset\mathscr{T}$. 本节的目的是定义$(X_\tau,\tau\in\mathscr{T},P^{r,\mu})_{\mu\in M_F(E)}$①.

首先，我们来看任给停时 $\tau\in\mathscr{T}$，如何定义 X_τ. 一个自然的想法是利用分枝粒子系统逼近. 采用§3.2.4中的记号，我们先来构造"$\mathscr{T}$-时刻"ε-分枝粒子系统，记为 Z_τ^ε. 为此，首先回顾 ε-分枝粒子系统的描述. 假设初始时刻 $r\geqslant 0$时粒子的分布由强度为 μ/ε 的 Poisson 点过程确定. 系统中的粒子相互独立地按照 ξ 的概率律在空间中运动. 单个粒子自从出生以来在时刻 t 时仍存活的概率为 $\exp\{-\kappa^\varepsilon(s,t)\}$. 当粒子死亡时产生若干个新粒子，其个数由母函数 $\mathscr{G}^\varepsilon(t,x,v)$决定. 新粒子从父辈死亡的地点出发，相互独立地按照 ξ 的概率律在空间中运动. 由于在时刻 $t\geqslant r$ 存活的任何粒子，

① 对于不太熟悉超过程的读者，建议在第一次阅读时跳过本节.

连同其前辈一起可以一直追溯到系统的初始时刻 $r\geqslant 0$，于是便“拼凑”出一段按照 ξ-概率律在区间 $[s,t]$ 运动的轨迹. 若我们记沿着这条轨迹运动的“粒子”为 α，相对于 α 存在的概率空间对应着的停时为 τ_α（与 τ 同分布）. 于是在各自的 τ 时刻存活粒子的全体即组成了 Z^ε_τ. 类似于 Z^ε_t 之讨论，$\varepsilon Z^\varepsilon_\tau$ 的 Laplace 泛函为

$$P_{r,\mathscr{P}(\mu/\varepsilon)}e^{-\langle Z^\varepsilon_\tau,\varepsilon\phi\rangle}=\exp\left(-\langle\mu,\frac{1-w^\varepsilon_{r,\tau}}{\varepsilon}\rangle\right),\phi\in pb\mathscr{B}(E).\quad(3.6.1)$$

而 $w^\varepsilon_{r,\tau}$ 满足

$$w^\varepsilon_{r,\tau}(x)=P_{r,x}\Big[e^{-\varepsilon\phi(\xi_\tau)}e^{-\kappa^\varepsilon(r,\tau)}+\int_r^\tau e^{-\kappa^\varepsilon(r,s)}\kappa^\varepsilon(ds)\mathscr{G}^\varepsilon(s,\xi_s,w^\varepsilon_{s,\tau}(\xi_s))\Big]$$

在 §3.2.4 相同的条件下和类似的讨论，当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，$\varepsilon Z^\varepsilon_\tau$ 弱收敛到一个随机测度 X_τ. 其 Laplace 泛函为

$$P^{r,\mu}\exp\{-\langle X_\tau,\phi\rangle\}=\exp\{-\langle\mu,V^r_\tau\phi\rangle\},\phi\in pb\mathscr{B}(E),\quad(3.6.2)$$

而 $V_\tau\phi$ 满足

$$v^r_\tau(x)+P_{r,x}\int_r^\tau\Psi(\xi_s,v^s_\tau(\xi_s))\kappa(ds)=P_{r,x}\phi(\xi_\tau),x\in E.\quad(3.6.3)$$

而且方程(3.6.3)的解存在唯一.

对于 $\tau_1,\cdots,\tau_n\in\mathscr{T},n\geqslant 2,X_{\tau_1},\cdots,X_{\tau_n}$ 的联合分布如下. 取

$$I=\{1,\cdots,n\},\tau_I=\min\{\tau_1,\cdots,\tau_n\},\lambda=\min\{i:\tau_i=\tau_I\}.$$

对于任何 $f_i\in pb\mathscr{B}(E),i\in I$，记

$$\langle X_I,f_I\rangle:=\sum\langle X_{\tau_i},f_i\rangle.\quad(3.6.4)$$

则

$$P^{r,\mu}\exp\{-\langle X_I,f_I\rangle\}=\exp\{-\langle\mu,v_I\rangle\},\quad(3.6.5)$$

其中 v_I 由下面积分方程递推得到：

$$v_I(r,x)+P_{r,x}\int_r^{\tau_I}\Psi(\xi_s,v_I(s,\xi_s))\kappa(ds)=P_{r,x}G_I,\quad(3.6.6)$$

而 $G_I=f_\lambda(\xi_{\tau_\lambda})+v_{I\setminus\{\lambda\}}(\tau_\lambda,\xi_{\tau_\lambda})$.

实际上，(3.6.5)与(3.6.6)决定了取值于 $M_F(E)$，参数集为 $\mathscr{T}$ 的一个相容的有限维概率分布族. 由 Kolmogorov 构造定理，我们知道 $(X_\tau,\tau\in\mathscr{T},P^{r,\mu})$ 在分布意义下存在唯一. 由于 $[0,\infty)\subset$

$\mathscr{T}$，称此过程为增广超过程(enhanced superprocess).

设 $Q\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+\times E)$. 令 $\tau_Q:=\inf\{t>0;(t,\xi_t)\notin Q\}$. 若 ξ 是右过程，则对于任何 $Q\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+\times E)$，$\tau_Q$ 是停时(相对于完备化的右连续 σ-域簇). 特别地，当 ξ 是扩散过程时，τ_Q 是停时. 由过程的构造，易知增广超过程有如下的性质：

定理3.6.1 (a)对于 $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+\times E)$，若 $\tau\in\mathscr{T}$，$(\tau,\xi_\tau)\in B$，$\mu(P)$-a.s.，则 $X_\tau\in M(B)$(B 上的有限测度).

(b)$X_{\tau_Q}\in M(Q^c)$，$P^{r,\mu}$-a.s.，$\mu\in M_F(E)$.

(c)对于 $\mu\in M(Q^c)$，$P^\mu\{X_{\tau_Q}=\mu\}=1$.

然而，$\mathscr{T}$ 集合相对过大. 而在以后的研究中，我们更关心的是所谓细开集的首出时全体.

定义3.6.2 称 $Q^r:=\{(r,x);P_{r,x}(\tau_Q>r)=1\}$ 为 Q 的正则点集. 如果 $Q=Q^r$，称 Q 为**细开集**.

注意到细开集的首出时与它的正则点集的首出时一致. 若 Q 和 $\tilde{Q}$ 为细开集，则显然有，$\tau_Q\leqslant\tau_{\tilde{Q}}$ 当且仅当 $Q\subset\tilde{Q}$.

下面考虑细开集之情况. 记全体精细开集的首出时为 $\overline{\mathscr{T}}$. 由于$[0,t)\times E$ 是细开集，而这类集合的首出时显然为 t，因此$[0,\infty)\subset\overline{\mathscr{T}}$. $(X_\tau,\tau\in\overline{\mathscr{T}},P^{r,\mu})_{\mu\in M_F(E)}$也可以看成$(X_t,t\geqslant 0,P^\mu)_{\mu\in M_F(E)}$的增广超过程. 下面的定理是非常有用的.

定理3.6.3(特殊 Markov 性) 假设 ξ 是强 Markov 过程，考虑增广超过程$(X_\tau,\tau\in\overline{\mathscr{T}},P^{r,\mu})_{\mu\in M_F(E)}$. 令 $\mathscr{H}_{\leqslant\tau}=\sigma(X_{\tau'};\tau'\leqslant\tau,\tau'\in\overline{\mathscr{T}})$，$\mathscr{H}_{\geqslant\tau}=\sigma(X_{\tau'};\tau'\geqslant\tau,\tau\in\overline{\mathscr{T}})$. 如果 $Y\in bp\mathscr{H}_{\leqslant\tau}$，$Z\in bp\mathscr{H}_{\geqslant\tau}$，$\mu\in M_F(\mathbb{R}_-\times E)$，则

$$P^\mu YZ=P^\mu(YP_{X_\tau}Z). \tag{3.6.7}$$

证明 由单调类定理，只要证明(3.6.7)对如下形式：

$Y=\exp\{-\langle X_I,f_I\rangle-\langle X_\tau,f_0\rangle\}$，$Z=\exp\{-\langle X_\tau,h\rangle-\langle X_J,f_J\rangle\}$

成立即可. 其中 $\tau_0:=\tau=\tau_Q$，$\tau_i\leqslant\tau_0\leqslant\tau_j$，$f_i\geqslant 0$，$f_j\geqslant 0$，$i\in I$，$j\in J$，$f_0,h\geqslant 0$，而$\langle X_I,f_I\rangle$由(3.6.4)定义，不失一般性，假设 $h=0$. 否则，只要取 f_0为 f_0+h 即可.

对于 $\tau\in\overline{\mathscr{T}}$，取

$$(\Phi_\tau v)^r(x) := v^r(x) + P_{r,x}\int_r^\tau \Psi(\xi_s, v^s(\xi_s))\kappa(ds). \qquad (3.6.8)$$

用该记号，我们可把(3.6.6)重写为

$$(\Phi_{\tau_I})^r(x) = P_{r,x}G_I. \qquad (3.6.9)$$

对于任何有限集 $K\subset I$，我们取，

$$v_K(r,x) = -\log P_{r,\delta_x}\exp\langle X_K, -f_K\rangle, \qquad (3.6.10)$$

而 $\tau(K)=\inf\{\tau_k;k\in K\}$，$\lambda(K)=\min\{k;\tau_k=\tau(K)\}$. 由(3.6.4)，(3.6.5)与(3.6.9)，v_K 满足方程

$$(\Phi_{\tau(K)}v_K)^r(x) = P_{r,x}[f_{\lambda(K)}(\xi_{\tau_{\lambda(K)}}) + v_{K\setminus\lambda(K)}(\tau_{\lambda(K)},\xi_{\tau_{\lambda(K)}})]. \qquad (3.6.11)$$

而且，任何的 $\mu\in M_F(\mathbb{R}_+\times E)$，

$$P^\mu\exp\langle X_K, -f_K\rangle = \exp\langle\mu, -v_K\rangle. \qquad (3.6.12)$$

现在我们有归纳法来证(3.6.7). 首先考察 $I=\varnothing$，并取 $K=\{0\}\cup J$. 显然，这时 $\lambda(K)=0$，$\tau(K)=\tau$. 而且有

$$P^\mu YP^{X_\tau}Z = P^\mu\exp\langle X_\tau, -\tilde{f}\rangle = \exp\langle\mu, -\tilde{v}\rangle,$$

其中 $\tilde{f}=f_0-v_J$，而 $\tilde{v}(r,x)=-\log P^{r,\delta_x}\exp\langle X_\tau, -\tilde{f}\rangle$ 满足方程 $(\Phi_\tau\tilde{v})^r(x)=P_{r,x}\tilde{f}_0$. 由(3.6.11)，$v_K$ 满足同样的方程，因此 $v_K=\tilde{v}$. 即在此假设下，证明了(3.6.7).

现在设 $I\neq\varnothing$，τ_i 是首出 $Q_i\subset Q$ 的时间，则 $\tau(I)$ 即是首出 $U:=\bigcap_{i\in I}Q_i$的时间. 对 $\tau(I)$应用已证的结论，我们有

$$P^\mu YZ = P^\mu P^{X_{\tau(I)}}YZ, P^\mu YP^{X_\tau}Z = P^\mu P^{X_{\tau(I)}}[YP^{X_\tau}Z]. \qquad (3.6.13)$$

假设 $\Gamma_i\subset Q_i$ 相互不交，且 $U^c=\bigcup_{i\in I}\Gamma_i$. 记 N_i 为 $X_{\tau(I)}$在 Γ_i 上的限制. 由定理3.6.1(b)及(3.6.5)，

$$P^{X_{\tau(I)}}YZ = \prod_{i\in I}\{\exp\langle N_i, -f_i\rangle P^{N_i}\exp[-\langle X_{I\setminus i}, f_{I\setminus i}\rangle - \langle X_\tau, f_0\rangle]Z\},$$

$$P^{X_{\tau(I)}}[YP^{X_\tau}Z] = \prod_{i\in I}\{\exp\langle N_i, -f_i\rangle P^{N_i}\exp[-\langle X_{I\setminus i}, f_{I\setminus i}\rangle - \langle X_\tau, f_0\rangle]P^{X_\tau}Z\},$$

由此及(3.6.13)，归纳即得所要结论成立. □

注3.6.4 定理3.6.3之所以称为"特殊 Markov 性"，是因为

有关停时是底过程的停时，而不是超过程的停时. 显然，从形式上看，它有点像强 Markov 性. 然而，在定理3.6.3假设下，超过程是否为强 Markov 过程？我们还没有看到一个完满的答案. 在一些具体情况下，如二分枝超 Brown 运动等，已经证明了超过程的强 Markov 性.

注3.6.5 定理3.6.3给出了移民超过程的一个性质. 实际上，若把移民超过程的初始测度连同与时间有关的移民强度(测度)看成 $M_F(\mathbb{R}_+\times E)$ 中的元素 μ，并考虑 $\tau\equiv t$，则相应移民超过程的 Laplace 泛函：

$$P^\mu\exp\{-\langle X_t,\phi\rangle\}=\exp\left\{-\int_{[0,t]\times E}\mu(ds,dx)V_{s,t}\phi(x)\right\},\quad(3.6.14)$$

$\phi\in pb\mathscr{B}(E)$. 其中 $V_{s,t}\phi$ 满足(3.2.10).

一般的移民超过程在国内外有很多的讨论. 在这方面，国内取得了很好的研究成果. 有关情况可参见李增沪的系列文章[130～138].

本节最后，引入一个新的概念.

定义3.6.6(部分超过程) 设 $Q\subset\mathbb{R}_+\times E$ 是细开集，τ_t 是首出 $Q_{<t}:=Q\cap([0,t)\times E)$ 的时间. 记 $\tilde{X}_t$ 为 X_{τ_t} 在 Q 的 t-截面上的限制，那么 $\tilde{X}=(\tilde{X}_t,P^{r,\mu})$ 是取值于 $M_F(Q)$ 的 Markov 过程. 并称之为 X 在 Q 中的部分.

显然，超过程本身可以看成自己在 $Q=\mathbb{R}_+\times E$ 中的部分. 由通常的讨论可知，部分超过程也有正则的修正，使得对于定义在 $\mathbb{R}_+\times E$ 上任何有界的可测函数 f，如果 $f^{t\wedge\tau}(\xi_{t\wedge\tau})$ 是几乎所有右连续的，那么 $\langle\tilde{X}_t,f(t,\cdot)\rangle$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上右连续(参见文献[48]). 假设 $\rho\in pb\mathscr{B}(\mathbb{R}_+\times E)$，$\langle\tilde{X}_t,\rho\rangle$ 是 $\mathscr{B}\times\mathscr{F}$-可测函数. 因此，对于每一个 $\mathbb{R}_+$ 上测度 η，我们可以定义积分 $\int_{\mathbb{R}_+}\langle\tilde{X}_t,\rho\rangle\eta(dt)$.

定理3.6.7 对于任何的 $\mu\in M_F(\mathbb{R}_+\times E)$ 和任何的 $f,\rho\in p\mathscr{B}(\mathbb{R}_+\times E)$，

$$P^\mu\exp\left\{\int_{\mathbb{R}_+}\langle\tilde{X}_t,-\rho\rangle\eta(dt)-\langle X_\tau,f\rangle\right\}$$

$$= \exp\langle \mu, -v \rangle, \qquad (3.6.15)$$

其中

$$v(r,x) + p_{r,x}\int_r^\tau \Psi(v)(s,\xi_s)\kappa(ds)$$

$$= P_{r,x}\left[\int_r^\tau \rho(t,\xi_t)\eta(dt) + f(\tau,\xi_\tau)\right]. \qquad (3.6.16)$$

证明 事实上，只需对有限区间$[a,b]$上的测度 η 和有界可测函数 ρ 证明所要结论即可. 一般情况可通过单调函数序列逼近来得到. 为此，分三步来证明该定理.

第一步. 设 η 集中在有限集合$\{t_1<\cdots<t_n\}$上，由定义，

$$\int_{\mathbb{R}_+} \langle \widetilde{X}_t, \rho^t \rangle \eta(dt) = \sum_{i=1}^n \langle \widetilde{X}_{t_i}, f_i \rangle,$$

其中 $f_i = 1_Q\eta(\{t_i\})\rho^{t_i}$. 这时由(3.6.5)和(3.6.6)即知(3.6.15)和(3.6.16)成立.

第二步. 设 ρ 是$([a,b]\times E)\cap(Q\cup\partial Q)$上的连续函数. 取一个分割 $\Delta=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b\}$并且取

$$Y = \int_a^b \langle \widetilde{X}_t, \rho^t \rangle \eta(dt) + \langle X_\tau, f \rangle,$$

$$Y_\Delta = \sum_{i=1}^n \langle \widetilde{X}_{\tau_{t_i}}, \rho^{t_i} \rangle \eta((t_{i-1}, t_i]) + \langle X_\tau, f \rangle.$$

由第一步，

$$P^\mu \exp(-Y_\Delta) = \exp\langle \mu, v_\Delta \rangle, \qquad (3.6.17)$$

其中 $v_\Delta(r,x) = -\log P^{r,\delta_x}\exp(-Y_\Delta)$满足

$$v_\Delta(r,x) + P_{r,x}\int_r^\tau \Psi(v_\Delta)(s,\xi_s)\kappa(ds)$$

$$= P_{r,x}\left[\int_r^\tau \rho(\beta(t),\xi_t)\eta(dt) + f(\tau,\xi_\tau)\right]. \qquad (3.6.18)$$

其中 $\beta(t)=t_i, t_i-1<t\leqslant t_i$. 假设 $\Delta_1\subset\Delta_2\subset\cdots\subset\Delta_n\subset\cdots$而且这些分点的并在$[a,b]$中稠. 那么 $Y_{\Delta_n}\to Y, v_{\Delta_n}\to v$. 这样由(3.6.17)，(3.6.18)取极限即得(3.6.15)，(3.6.16).

第三步. 容易证明，若 ρ_n 使得(3.6.15)，(3.6.16)成立，且

$\rho_n \to \rho$有界逐点收敛，则它们也对于 ρ 成立. 从而由第二步即知结论对所有的有界函数 ρ 成立. □

文献评注：本章参考文献[101]，[19]，[39]，[45]，[48]和[206]，等等.

Dynkin 等人对增广超过程及其应用做了详尽的研究（参见[42～54]等）.

第四章　测度值分枝过程的鞅刻画

在用粒子系统逼近的方法构造一类广泛的测度值分枝过程——超过程之后，自然想研究这类超过程的性质.由这种构造，我们得到了超过程的 Laplace 泛函.这使得我们可以充分利用分析上的理论和方法.但这是不够的，因为在研究随机过程的时候，常常要用到随机分析的思想.为了我们能够在随机分析的框架研究超过程，首先要考虑其鞅刻画.

鞅问题是构造超过程的一个有效途径.当然，超过程的构造还有其它方法，比如，历史轨道过程(参见文献[33])、Le Gall 的轨道构造方法(参见下一章)等.不同的方法对研究不同的问题显示出各自的优越性.考虑鞅特征的好处在于它不需要过多的预备知识，又可以借助随机分析理论来研究超过程.

§4.1　(A,Ψ)-超过程的鞅问题

为研究上的方便及技术原因，我们需要适当限制一下研究范围.借用上一章的记号，我们假定

(i) $\kappa(ds)=ds$.

(ii) E 是一个局部紧距离空间，底过程 $(\xi_t,t\geqslant 0,P_x)_{x\in E}$ 是 Markov 过程.其算子半群 S_t 在 $C_0(E)$ 上是 Feller 的，$(A,D(A))$ 为其生成元.

(iii) 临界分枝机制 Ψ 是时间齐次的，

$$\Psi(x,\lambda)=c(x)\lambda^2+\int_0^\infty(e^{-\lambda u}-1+\lambda u)\nu(x,du),\qquad(4.1.1)$$

其中测度 $\nu(x,dy)$ 满足 $\sup_x\int_0^\infty u^2\wedge u\nu(x,du)<\infty$，且 $0\leqslant c(x)\leqslant c_0<\infty,\forall\, x\in E$.

(iv) $\{X(t): t \geqslant 0\}$ 是定义在 $(D, \mathscr{D}, (\mathscr{D}_t)_{t\geqslant 0})$ 上的典范过程，其中 $D := D([0,\infty), M_F(E))$（右连左极轨道空间），且存在 D 上一簇 Markov 概率律 $\{P^\mu, \mu \in M_F(E)\}$ 其转移函数由式(3.2.18)决定，即对于 $t>s, \mu\in M_F(E)$，

$$P^\mu(e^{-\langle X_t, \phi\rangle} | \mathscr{D}_s) = e^{-\langle X_s, V_{t-s}\phi\rangle}, \phi \in bp\mathscr{B}(E). \quad (4.1.2)$$

而 $v_t = V_t\phi$ 是如下方程的 mild-解.

$$\frac{\partial}{\partial t}v = Av_t - \Psi(v_t), v_0 = \phi, \quad (4.1.3)$$

其中 $\Psi(\phi)(x) := \Psi(x, \phi(x))$. 称相应的超过程为 (A,Ψ)-**超过程**，$\{V_t: t\geqslant 0\}$ 称为 (A,Ψ)-**非线性半群**. (A,Ψ)-超过程的特殊情形可见注3.4.3.

命题4.1.1 任意固定 $T>0$，则对于 $\phi \in bp\mathscr{E}$，

$$\exp(-\langle X_t, V_{T-t}\phi\rangle) \text{ 在 } [0,T] \text{ 上是鞅}. \quad (4.1.4)$$

证明 由(4.1.2)及半群性立即得到

$$\begin{aligned} E(\exp(-\langle X_t, V_{T-t}\phi\rangle) | \mathscr{D}_s) &= \exp(-\langle X_s, V_{t-s}V_{T-t}\phi\rangle) \\ &= \exp(-\langle X_s, V_{T-s}\phi\rangle). \end{aligned}$$

命题证毕. □

4.1.1 鞅问题的描述

为了建立与 (A,Ψ)-超过程相应的鞅问题，我们首先需要找出它的生成元 $(\mathscr{G}, \mathscr{D}(\mathscr{G}))$. 取 $\mathscr{D}(\mathscr{G}) := \{F: F(\mu) = f(\langle\mu,\phi\rangle), \phi\in D(A), f\in C_b^\infty(\mathbb{R})\}$. 对于 $F\in\mathscr{D}(\mathscr{G})$，

$$\begin{aligned} \mathscr{G}F(\mu) = &\frac{1}{2}\iint \mu(dx)c(x)\delta_x(dy)F''(\mu;x,y) \\ &+ \int\mu(dx)\int_0^\infty \nu(x,du)[F(\mu+u\delta_x) - F(\mu) \\ &- uF'(\mu,x)] + \int\mu(dx)AF'(\mu;x), \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

其中

$$F'(\mu;x) := \delta F(\mu)/\delta\mu(x) := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(\mu+\varepsilon\delta_x) - F(\mu)}{\varepsilon},$$

$$F''(\mu;x,y) := \delta^2 F(\mu)/\delta_\mu(x)\delta_\mu(y).$$

等价地，若 $F(\mu):=f(\langle\mu,\phi\rangle)$，

$$\begin{aligned}\mathscr{G}F(\mu)=&f'(\langle\mu,\phi\rangle)\langle\mu,A\phi\rangle+\frac{1}{2}f''(\langle\mu,\phi\rangle)\langle\mu,c\phi^2\rangle\\&+\int\mu(dx)\int_0^\infty\nu(x,du)[f(\langle\mu,\phi\rangle+u\phi(x))\\&-f(\langle\mu,\phi\rangle)-f'(\langle\mu,\phi\rangle)u\phi(x)].\end{aligned}$$

下面要研究$(\mathscr{G},\mathscr{D}(\mathscr{G}))$-鞅问题解的存在唯一性，而且其解就是前面所定义的超过程的概率律. 下面的结果属于 El Karoui-Roelly(1991)[56].

定理4.1.2 假定上面的条件(i)—(iv)成立. 设 $D_0(A):=\{\phi:\phi=\phi_0+\varepsilon,\phi_0\in pD(A),\varepsilon>0\}$，则

(a) 对于 $F(\mu)=f(\langle\mu,\phi\rangle)$，$f\in C_b^\infty(\mathbb{R})$，$\phi\in D_0(A)$，

$$M_F(t):=F(X(t))-\int_0^t\mathscr{G}F(X(s))ds \text{ 是鞅}, \tag{4.1.6}$$

其中 $\mathscr{G}$ 由(4.1.5)给出.

(b)$(\mathscr{G},\mathscr{D}(\mathscr{G}))$-鞅问题的任何解均满足(4.1.4)，从而该鞅问题是适定的.

在证明该定理之前，我们需要简要回顾一下有关随机分析的基础知识. 有关细节请参考何声武、汪嘉冈、严加安著的《半鞅理论与随机分析》等.

4.1.2 鞅论的若干结果

定义4.1.3 称一个定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq0},P)$上右连左极适应过程 X 为**半鞅**，如果它可以表示成

$$X_t=X_0+M_t+A_t, \tag{4.1.7}$$

其中 M 是局部平方可积鞅①，$M_0=0$，A 是局部有界变差过程②.

① 存在停时列$\{\tau_n\}_{n\in N}$，$\tau_n\uparrow\infty(n\to\infty)$a. s. 使得对于 $n\geq1$，$M_{\tau_n\wedge t}$是平方可积鞅.

② 存在停时列$\{\tau_n\}_{n\in N}$，$\tau_n\uparrow\infty(n\to\infty)$a. s. 使得对于 $n\geq1$，$A_{\tau_n\wedge t}$ 是有界变差过程.

称 X 为**特殊半鞅**，若 A 具有局部可积变差①.

下面的引理见[88]，定理8.5.

引理4.1.4 若 A 是可料的②，则特殊半鞅形如(4.1.7)的表现是唯一的.

定义4.1.5 设(S,d)是一个 Polish 空间，称 N 是$\mathbb{R}_+\times S$上的**点测度**，如果 $N(t,B)$表示在$[0,t]\times B$，$B\in\mathscr{B}(S)$中点的个数，且满足如下条件：

(a)$E(N(B))<\infty$，$\forall\ B\in b\mathscr{B}(S)$，

(b)存在$\{\hat{N}(t,B):t\geqslant 0,B\in\mathscr{B}(S)\}$使得(i)对于$B\in b\mathscr{B}(S)$，$t\to\hat{N}(t,B)$是连续的$\mathscr{F}_t$-适应增过程；(ii)对于每一 t 及 a.s. $\omega\in\Omega$，$B\to\hat{N}(t,B)$是$(S,\mathscr{B}(S))\sigma$-有限测度；(iii)对于$B\in b\mathscr{B}(S)$，$t\to\tilde{N}(t,B):=N(t,B)-\hat{N}(t,B)$为$(\mathscr{F}_t)$-局部鞅，即 $\tilde{N}$ 为鞅测度. 可料增过程$\hat{N}$称为**补偿因子**.

考虑半鞅

$$
\begin{aligned}
Z(t) = Z(0) + A(t) + M_c(t) + \int_0^{t-}\int_S g_1(s,z)\tilde{N}(ds,dz) \\
+ \int_0^{t+}\int_S g_2(s,z)N(ds,dz),
\end{aligned}
\tag{4.1.8}
$$

其中 A 是连续适应局部有界变差过程，$A(0)=0$；M_c 是连续局部鞅，其增过程为$\langle M_c\rangle_t$，$M_c(0)=0$；g_1 是可料的且在局部修正意义下满足 $E[\int_0^t|g_1(s,z)|^2\hat{N}(ds,dz)]<\infty$，$g_2$ 是可料的且对于任一 t，$\int_0^{t+}\int_S|g_2(s,z)|N(ds,dz)<\infty$ a.s. 而且 $g_1g_2=0$. 由文献[92].

引理4.1.6(Itô 引理) 对于 $f\in C^{1,2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$，$f(t,Z(t))$仍为半鞅，且

$f(t,Z(t)) - f(0,Z(0))$

---

① 存在停时列$\{\tau_n\}_{n\in N}$，$\tau_n\uparrow\infty(n\to\infty)$ a.s. 使得对于 $n\geqslant 1$，$\int_0^\infty d|A_{\tau_n\wedge t}|$是可积的.

② 有些书上称可料为可及.

$$= \int_0^t f_1(s,Z(s))ds + \int_0^t f_2(s,Z(s))dA(s)$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t f_{22}(s,Z(s))d\langle M_c\rangle_s$$

$$+ \int_0^{t+}\int_S [f(s,Z(s-)+g_2(s,z))-f(s,Z(s-))]N(ds,dz)$$

$$+ \int_0^{t+}\int_S [f(s,Z(s) + g_1(s,z)) - f(Z(s))$$

$$-g_1(s,z)f'(s,Z(s))]\hat{N}(ds,dz) + \text{局部鞅}, \qquad (4.1.9)$$

其中

$$f_1(s,\ \cdot):= \partial f(s,\ \cdot)/\partial s,$$

$$f_2(\cdot,x):= \partial f(\cdot,x)/\partial x,$$

$$f_{22}(\cdot,x):= \partial^2 f(\cdot,x)/\partial x^2.$$

引理4.1.7 设 X 和 Y 为实值、右连续、$\mathscr{F}_t$-适应过程. 假定对于每个 t，$\inf_{s\leqslant t}X(s)>0$. 则

$$M_1(t):= X(t) - \int_0^t Y(s)ds \qquad (4.1.10)$$

是 $\mathscr{F}_t$-局部鞅当且仅当

$$M_2(t):= X(t)\exp\left\{-\int_0^t \frac{Y(s)}{X(s)}ds\right\} \qquad (4.1.11)$$

是一个 $\mathscr{F}_t$-局部鞅.

证明 假定 M_1是 $\mathscr{F}_t$-局部鞅，由半鞅的分部积分公式(参见文献[60]，Prop. 3.2)，

$$\int_0^t \exp\left\{-\int_0^s \frac{Y(u)}{X(u)}du\right\}dM_1(s)$$

$$= \int_0^t \exp\left\{-\int_0^s \frac{Y(u)}{X(u)}du\right\}dX(s)$$

$$- \int_0^t \exp\left\{-\int_0^s \frac{Y(u)}{X(u)}du\right\}Y(s)ds$$

$$= X(t)\exp\left\{-\int_0^s \frac{Y(u)}{X(u)}du\right\} - X(0) \qquad (4.1.12)$$

是 $\mathscr{F}_t$-局部鞅. 反之，若 M_2是 $\mathscr{F}_t$-局部鞅，则

$$\int_0^t \exp\left\{\int_0^s \frac{Y(u)}{X(u)}du\right\}dM_2(s)$$

$$= X(t) - X(0) - \int_0^t Y(s)ds \qquad (4.1.13)$$

是 $\mathscr{F}_t$-局部鞅.

4.1.3 鞅问题的存在唯一性

定理4.1.2的证明 先看(a). 令 $Z_t(\phi):=e^{-\langle X_t,\phi\rangle}$. 首先证明 $Z_t(\phi)$是一个特殊半鞅,再应用半鞅分解的唯一性可推断我们所需的结果. 以下分几个步骤来进行.

第一步. 往证对于 $\phi\in D_0(A),\phi\geqslant k>0$,

$$H_t(\phi):=\exp\left(-\langle X_t,\phi\rangle+\int_0^t\langle X_s,A\phi+\Psi(\phi)\rangle ds\right) \tag{4.1.14}$$

是 P^{X_0}-局部鞅. 为此先要证明对于 $B\in\mathscr{D}_s, s\leqslant t$,

$$\frac{d}{dt}E(1_B\exp(-\langle X_t,\phi\rangle))$$

$$=-E(1_B\langle X_t,(A\phi+\Psi(\phi))\rangle\exp(-\langle X_t,\phi\rangle)). \quad (4.1.15)$$

由(4.1.2),

$$\varepsilon^{-1}E(1_B(\exp(-\langle X_{t+\varepsilon},\phi\rangle)-\exp(-\langle X_t,\phi\rangle)))$$

$$=\varepsilon^{-1}E(1_B(\exp(-\langle X_t,V_\varepsilon\phi\rangle)-\exp(-\langle X_t,\phi\rangle))).$$

为了说明对上式关于 $\varepsilon\downarrow 0$可取极限,考察

$$D^\varepsilon(\mu):=\varepsilon^{-1}|\exp(-\langle\mu,V_\varepsilon\phi\rangle)-\exp(-\langle X_t,\phi\rangle)|.$$

注意到 $v_t=S_t\phi-\int_0^t\Psi(v_s)ds$ 及 $S_t\phi-\phi=\int_0^t S_sA\phi ds$,则有

$$\|V_t\phi-\phi\|/t\leqslant(\|A\phi\|+\sup_{r<T}\|\Psi(V_r\phi)\|)\leqslant K(T,\phi).$$

所以

$$D^\varepsilon(\mu)\leqslant\exp(-k\langle\mu,1\rangle)\varepsilon^{-1}(\exp(K(T,\phi)\varepsilon\langle\mu,1\rangle)-1)$$

是关于$0<\varepsilon\leqslant1$一致的$\langle\mu,1\rangle$的有界函数. 类似地,可证 $\varepsilon\downarrow 0$的情况. 取极限 $\varepsilon\to0$,并由控制收敛定理与(4.1.3)得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}E(1_B(\exp(-\langle X_{t+\varepsilon},\phi\rangle)-\exp(-\langle X_t,\phi\rangle)))$$
$$=-E(1_B\langle X_t,A\phi+\Psi(\phi)\rangle\exp(-\langle X_t,\phi\rangle)).$$

这就证明了

$$\exp(-\langle X_t,\phi\rangle)-\int_0^t\langle X_r,A\phi+\Psi(\phi)\rangle\exp(-\langle X_r,\phi\rangle)dr \tag{4.1.16}$$

是局部鞅. 由引理4.1.7知, $H_t(\phi)$是局部鞅.

第二步. 半鞅表现. 令 $Y_t(\phi)=\exp(-\int_0^t\langle X_s,A\phi+\Psi(\phi)\rangle ds)$. 显然 $Y_t(\phi)$是一个连续有限变差半鞅. 由第一步的结论知, $H(\phi)$是局部鞅, 因而 $Z_t(\phi)=H_t(\phi)Y_t(\phi)$是半鞅, 从而由 Itô 分步积分公式得此半鞅的第一个表现

$$dZ_t(\phi)=Y_t(\phi)dH_t(\phi)+H_{t-}(\phi)dY_t(\phi)$$
$$=Y_t(\phi)dH_t(\phi)-\langle X_t,A\phi+\Psi(\phi)\rangle Z_{t-}(\phi)dt. \tag{4.1.17}$$

注意到 $H_{s-}dY_s$ 在$[0,t]$上的变差受控于

$$\int_0^t\exp\left(\int_0^s|\langle X_u,A\phi+\Psi(\phi)\rangle|du\right)|\langle X_s,A\phi+\Psi(\phi)\rangle|ds.$$

而它在假设(iii)下是局部平方可积的. 因此, $Z_t(\phi)$是一个特殊半鞅.

另一方面, 对于 $\phi\in D_0(A)$, 应用 Itô 公式可知 $\langle X_t,\phi\rangle=-\log Z_t(\phi)$ 也是半鞅. 设 $N(ds,d\mu)$ 是由 $\sum\delta_{(t,\Delta X_t)}$ 给出的 $\mathbb{R}_+\times M_F(E)$ 上适应的随机点测度, 其中 $\Delta X_t:=X_t-X_{t-}$, $\hat{N}(ds,d\mu)$ 为其补偿因子. 则对于 $\phi\in D_0(A)$, $\langle X_t,\phi\rangle$ 具有如下形式的典则表现(参见([88], 定理 11.25)):

$$\langle X_t,\phi\rangle=\langle X_0,\phi\rangle+U_t(\phi)+M_t^c(\phi)+\tilde{N}(\phi)+N_t(\phi), \tag{4.1.18}$$

其中 $U_t(\phi)$是连续的局部有界变差过程; $M_t^c(\phi)$是一个连续的局部鞅, 其增过程记为 $C_t(\phi)$, 而且

$$\tilde{N}(\phi)=\int_0^t\int_{M_F^\pm(E)}1_{|\langle\mu,\phi\rangle|\leqslant\|\phi\|}\langle\mu,\phi\rangle\tilde{N}(ds,d\mu),$$

$$N(\phi)=\int_0^t\int_{M_F^{\pm}(E)}1_{|\langle\mu,\phi\rangle|>\|\phi\|}\langle\mu,\phi\rangle N(ds,d\mu),$$

$M_F^{\pm}(E)$表示 E 上有限变差符号测度的全体. 对 $\exp(-\langle X_t,\phi\rangle)$应用 Itô 公式,由(4.1.18)我们有

$$\begin{aligned}dZ_t(\phi)=&Z_{t-}(\phi)\Big\{-dU_t(\phi)+\frac{1}{2}dC_t(\phi)\\&+\int_{M_F^{\pm}(E)}(e^{-\langle\mu,\phi\rangle}-1+\langle\mu,\phi\rangle)1_{|\langle\mu,\phi\rangle|\leqslant\|\phi\|}\hat{N}(dt,d\mu)\\&+\int_{M_F^{\pm}(E)}(e^{-\langle\mu,\phi\rangle}-1)1_{|\langle\mu,\phi\rangle|>\|\phi\|}N(dt,du)\Big\}\\&+d(\text{局部鞅}),\end{aligned}$$

其中 $M_t(\phi)$是局部鞅. 在假设(iii)之下,容易验证

$$Z_{t-}(\phi)(\exp(-\langle\Delta X_t,\phi\rangle)-1+\langle\Delta X_t,\phi\rangle)\geqslant 0$$

是可积的,于是半鞅 Z_t 的第二个表现为

$$\begin{aligned}dZ_t(\phi)=&Z_{t-}(\phi)\Big\{-dU_t'(\phi)+\frac{1}{2}dC_t(\phi)\\&+\int_{M_F^{\pm}(E)}(e^{-\langle\mu,\phi\rangle}-1+\langle\mu,\phi\rangle)\hat{N}(dt,d\mu)\Big\}\\&+d(\text{局部鞅}),\end{aligned}\tag{4.1.19}$$

其中 $U_t'(\phi)=U_t(\phi)+\int_{M_F^{\pm}(E)}\langle\mu,\phi\rangle 1_{|\langle\mu,\phi\rangle|>\|\phi\|}\hat{N}(dt,d\mu)$.

至此,我们得到 $dZ_t(\phi)$两种不同形式的表现.

第三步. 两种表现的等同. 由于 $Z_t(\phi)$是特殊半鞅,由分解的唯一性我们可以把以上两种不同形式的可料表现(4.1.17)与(4.1.19)统一起来,于是

$$\begin{aligned}&-Z_{t-}(\phi)\langle X_t,A\phi+\Psi(\phi)\rangle dt\\&=Z_{t-}(\phi)\Big(-dU_t'(\phi)+\frac{1}{2}dC_t(\phi)\\&\quad+\int_{M_F^{\pm}(E)}(e^{-\langle\mu,\phi\rangle}-1+\langle\mu,\phi\rangle)\hat{N}(dt,d\mu)\Big)\end{aligned}$$

为局部有界变差过程,而 $C_t(\phi)$是连续增过程,所以过程$\langle X_s,A\phi+\Psi(\phi)\rangle$在有限区间上是可积的,且

$$\int_0^t \langle X_s, A\phi + \Psi(\phi)\rangle ds = U_t'(\phi) - \frac{1}{2}C_t(\phi)$$
$$- \int_0^t\int_{M_F^{\pm}(E)} (e^{-\langle\mu,\phi\rangle} - 1 + \langle\mu,\phi\rangle)\hat{N}(ds,d\mu).$$

由(4.1.18)可知,$U_t(\theta\phi)=\theta U_t(\phi)$,$C_t(\theta\phi)=\theta^2C_t(\phi)$,$\theta\in R$.. 在上式中以 $\theta\phi$ 代替 ϕ,则有

$$\int_0^t \langle X_s, A(\theta\phi) + \Psi(\theta\phi)\rangle ds$$
$$= \theta\int_0^t \langle X_s, A\phi\rangle ds - \frac{\theta^2}{2}\int_0^t \langle X_s, c\phi^2\rangle ds$$
$$- \int_0^t ds\int X_s(dx)\int_0^\infty \nu(x,du)(e^{-u\theta\phi(x)} - 1 + u\theta\phi(x))$$
$$= \theta U_t'(\phi) - \frac{\theta^2}{2}C_t(\phi)$$
$$- \int_0^t\int_{M_F^{\pm}(E)} (e^{-\langle\mu,\theta\phi\rangle} - 1 + \langle\mu,\theta\phi\rangle)\hat{N}(ds,d\mu).$$

由 θ 的任意性,我们可以断定

$$U_t'(\phi) = \int_0^t \langle X_s, A\phi\rangle ds, C_t(\phi) = \int_0^t \langle X_s, c\phi^2\rangle ds$$

及

$$\int_0^t\int_{M_F^{\pm}(E)} (e^{-\langle\mu,\theta\phi\rangle} - 1 + \langle\mu,\theta\phi\rangle)\hat{N}(ds,d\mu)$$
$$= \int_0^t ds\int X_s(dx)\int_0^\infty \nu(x,du)(e^{-u\theta\phi(x)} - 1 + u\theta\phi(x))$$
$$= \int_0^t ds\int X_s(dx)\int_0^\infty \nu(x,du)(e^{-u\langle\delta_x,\theta\phi\rangle} - 1 + u\langle\delta_x,\theta\phi\rangle),$$

$\forall\ \theta>0,\phi\in D_0(A)$. 也就是说,过程 X 的跳测度具有补偿因子

$$\hat{N}(ds,d\mu)=dsX_s(dx)\nu(x,du)\delta_{u\delta_x}(d\mu),\mu\in M_F(E). \quad (4.1.20)$$

特别,它还说明了 X 的跳跃几乎所有发生在正测度之中.

第四步:往证 $\{X_t\}$ 的半鞅表现是 $(\mathscr{G},\mathscr{D}(\mathscr{G}))$-鞅问题的解. 对于 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$,由 Itô 公式,

$$M_f(t):= f(\langle X_t,\phi\rangle) - f(\langle X_0,\phi\rangle) - \int_0^t f'(\langle X_s,\phi\rangle)dU_s'(\phi)$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^t f''(\langle X_{s-},\phi\rangle)dC_s(\phi)$$

$$- \int_0^t\int_{M_F^{\pm}(E)} (f(\langle X_s + \mu,\phi\rangle) - f(\langle X_s,\phi\rangle)$$

$$- f'(\langle X_s,\phi\rangle)\langle\mu,\phi\rangle)\hat{N}(ds,d\mu)$$

是局部鞅. 再注意到(4.1.20),

$$M_f(\phi) = f(\langle X_t,\phi\rangle) - f(\langle X_0,\phi\rangle)$$
$$- \int_0^t \Big(f'(\langle X_{s-},\phi\rangle)\langle X_s,A\phi\rangle ds$$
$$+ \frac{1}{2}f''(\langle X_s,\phi\rangle)\langle X_s,c\phi^2\rangle\Big) ds$$
$$- \int_0^t \langle X_s,\int_0^\infty \nu(\cdot,d\lambda)(f(\langle X_s,\phi\rangle + \lambda\phi(\cdot))$$
$$- f(\langle X_s,\phi\rangle) - f'(\langle X_s,\phi\rangle)\lambda\phi(\cdot))\rangle ds.$$

特别地,若 f, f', f'' 有界,则它是一个鞅. 从而证明了过程 X_t 是 $(\mathscr{G},\mathscr{D}(\mathscr{G}))$-鞅问题的一个解.

现往证(b),假定 $\{X(t)\}$ 是 $(\mathscr{G},\mathscr{D}(\mathscr{G}))$-鞅问题的解. 我们要证明它满足(4.1.4). 为此,假定 $\psi(\cdot,x)\in C_b^1(R_+)$, $\psi(t,\cdot)\in D_0(A)$, $t\to A\psi(t,x)$ 是连续的, $\psi>0$ 且 $\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,\cdot)\in D_0(A)$. 若 $f\in C_b^\infty(R)$,则由 Itô 公式我们有

$$f(\langle X_t,\psi(t)\rangle) - \int_0^t \Big(f'(\langle X_s,\psi(s)\rangle)\langle X_s,A\psi(s) + \frac{\partial\psi}{\partial s}\rangle$$
$$+ \frac{1}{2}f''(\langle X_s,\psi(s)\rangle)\langle X_s,c\psi^2(s)\rangle\Big) ds$$
$$- \int_0^t \langle X_s,\int_0^\infty \nu(\cdot,d\lambda)(f(\langle X_s,\psi(s)\rangle + \lambda\psi(s,\cdot))$$
$$- f(\langle X_s,\psi(s)\rangle) - f'(\langle X_s,\psi(s)\rangle)\lambda\psi(s,\cdot))\rangle ds \qquad (4.1.21)$$

是局部鞅.

特别地,若 $\phi\in D_0(A)$,取 $\psi(t,x):=V_{T-t}\phi$,则

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)(V_{T-t}\phi) - \Psi(V_{T-t}\phi) = 0.$$

因此对 $\exp(-\langle X_t,V_{T-t}\phi\rangle)$ 应用(4.1.21)则可知它是一个鞅,于是

$$P^{X_0}\exp(-\langle X_t,\phi\rangle)=\exp(-\langle X_0,V_t\phi\rangle),t\geqslant 0.$$

另外,我们可以通过常规方法由极限逼近方法证明对于 $\phi\in bp\mathscr{E}$,所要结论仍成立.再由上章的结论即知 X_t 是唯一的,这也说明鞅问题是适定的.

在较之更广泛的条件下,Fitzsimmons(1991)证明了类似的结果,见文献[71]

§4.2 超过程的随机积分

在上一节,我们研究了超过程的鞅问题,从中可看到超过程与鞅有密切的关系.本节将专门研究有关超过程对应的鞅测度的随机计算.我们先从鞅测度这一概念开始.

4.2.1 鞅测度

定义4.2.1 设$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0},P)$是一个具有右连续过滤的概率空间.在 $\mathscr{B}(R_+)\times\mathscr{F}$ 中由所有实值连续适应过程生成的子 σ-代数称为 **$\mathscr{F}_t$-可料 σ-代数**,记为 $\mathscr{P}$.实际上,由文献[78],命题1.2,

$$\mathscr{P}=\sigma(\{(s,t]\times F;s<t\in R_+,F\in\mathscr{F}_s\}\cup\{\{0\}\times F;F\in\mathscr{F}_0\}).$$

假设 E 是 Luzin 空间,$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}(E)$中的一个子环(即关于并(加法)运算与交(乘法)运算封闭).考虑 $\mathscr{A}$ 上的**随机集函数** $U(A,\omega)$,它满足

$$\|U(A)\|_2:=(E[U(A)]^2)^{1/2}<\infty,\forall A\in\mathscr{A};$$

$$U(A)+U(B)=U(A+B)\text{a.s.},\forall A,B\in\mathscr{A}:A\cap B=\varnothing.$$

定义4.2.2 集函数 U 称为 **σ-有限的**,如果存在上升的集合列$\{E_n\}$使得

(a)$\bigcup_n E_n=E$;

(b)$\forall n,\mathscr{E}_n=\mathscr{B}(E)|_{E_n}\subset\mathscr{A}$;

(c)$\forall n,\sup_A\{\|U(A)\|_2,A\in\mathscr{E}_n\}<\infty$.

集函数 U 称为**可数可加的**,如果对于任一序列$\{A_j\}$下降到

$\varnothing$，$\|U(A_i)\|_2$趋于0.

对于σ-有限且可数可加的随机测度U，我们容易把其扩张到整个$\mathscr{B}(E)$上. 事实上，只需令

$$U(A):=\lim_n U(A\cap E_n),A\in\mathscr{B}(E). \qquad (4.2.1)$$

定义4.2.3 若式4.2.1中的极限在$L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$意义下存在，则称该集函数为**$\sigma$-有限$L^2$-值测度**.

定义4.2.4 称$\{M_t(A),t\geqslant 0,A\in\mathscr{A}\}$是相对于$\mathscr{F}_t$的**$L^2$-鞅测度**，如果

(a)$M_0(A)=0,\forall\ A\in\mathscr{A}$；

(b)$\{M_t(A),t\geqslant 0\}$是$\mathscr{F}_t$-鞅，$\forall\ A\in\mathscr{A}$；

(c)$\forall\ t>0$，$M_t(\cdot)$是σ-有限L^2-值测度.

M的变差泛函$Q(t;\cdot,\cdot)$定义为

$$Q_M(t;A,B):=\langle M(A),M(B)\rangle_t,A,B\in\mathscr{A}. \quad (4.2.2)$$

由此定义了$R_+\times E\times E$上的变差测度Q_M.

定义4.2.5 鞅测度M称为**有价值的**，如果存在随机σ-有限测度$K(\cdot,\cdot,\cdot;\omega)\in\mathscr{B}(E)\times\mathscr{B}(E)\times(\mathbb{R}_+)$，$\omega\in\Omega$使得

(a)K是对称正定的，即对于任何$f\in b\mathscr{B}(E)\times\mathscr{B}(R_+)$

$$\iiint f(x,s)f(y,s)K(dx,dy,ds)\geqslant 0,\text{a.s.}.$$

(b)对于任意固定的A,B，$\{K(A\times B\times[0,t]),t\geqslant 0\}$是$\mathscr{F}_t$-可料的，

(c)$\exists\ E_n\uparrow E$使得$E\{K(E_n\times E_n\times[0,T])\}<\infty,\forall n$，

(d)$|Q_M(t;A,B)|\leqslant K(A\times B\times[0,t])$.

其中K称为M的**控制测度**.

定义4.2.6 M称为**正交鞅测度**，如果M是鞅测度且当$A\cap B=\varnothing$时，$M_t(A)$与$M_t(B)$是正交的. 换句话说，$\forall\ A,B\in\mathscr{A}$，$A\cap B=\varnothing$，$M_t(A)M_t(B)$是鞅.

如果M是鞅测度且对于任何$A\in\mathscr{A}$，映射$t\to M_t(A)$是连续的，则称M是**连续鞅测度**.

下面的定理见文献[194]，Ch. 2.

定理4.2.7

(a)有价值的鞅测度 M 是正交的当且仅当对于所有 $t>0$，$Q_M(t;.,.)$的支撑在$\{(x,y):x=y\in E\}$中(即乘积空间 $E\times E$ 的对角线上).

(b)任一正交鞅测度 M 是有价值的，且存在$\mathbb{R}_+\times E$ 上随机 σ-有限测度 $\nu(ds,dx)$使得对于任一 $A\in\mathscr{A}$，过程 $\nu((0,t]\times A)$是可料的而且满足

$$\forall A\in\mathscr{A},\forall t>0,\nu((0,t]\times A)=\langle M(A)\rangle_t,P\text{-a.s.}$$

称测度 ν 为正交鞅测度 M 的**强度**.

(c)若正交鞅测度是连续的，则 $\nu(\{t\},E_n)=0,\forall t>0,\forall n\in\mathbb{N}$.

4.2.2 鞅测度的几个例子

下面给出几个重要的鞅测度的例子.

例 1 高斯白噪声(柱 Brown 运动) 设$(E\times\mathbb{R}_+,\mathscr{B}(E)\times\mathscr{B}(\mathbb{R}_+),\nu(dx)dt)$是一个 σ-有限测度空间. 根据 $\nu(dx)dt$ 我们可以定义 $\mathscr{B}(E)\times\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$上的一个随机集函数 W 使得

(a)$W(B\times[a,b])$是高斯随机变量，其均值为0，变差为 $\nu(B)|b-a|$.

(b)如果$(A\times[a_1,a_2])\cap(B\times[b_1,b_2])=\varnothing$，那么

$$W((A\times[a_1,a_2])\cup(B\times[b_1,b_2]))$$
$$=W(A\times[a_1,a_2])+W(B\times[b_1,b_2]),$$

且 $W(A\times[a_1,a_2])$与 $W(B\times[b_1,b_2])$相互独立.

称满足上述条件的 W 为**高斯白噪声**.

注4.2.8 $\{W_t(B):t\geqslant 0,B\in\mathscr{B}(E)\}$是一个正交鞅测度，其强度为 $\nu(dx)dt$. Walsh(1986)证明了连续的正交鞅测度是白噪声当且仅当它的变差测度是确定的(非随机).

特别地，取 $E=\mathbb{R}^d$，ν是 Lebesgue 测度，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 表示$\mathbb{R}^d$ 上速降 C^∞- 函数所组成的 Schwartz 空间．考虑鞅问题:$\forall\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$，

$W_t(\phi)$ 是连续平方可积鞅,其增过程 $\langle W(\phi)\rangle_t = t\int\phi^2(x)dx$. 这个鞅问题在 $C([0,\infty),\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$ 上有唯一解. 且对于 $\phi,\psi\in\mathscr{S}$, $W_t(\phi)$ 是高斯过程,而且 $\mathrm{Cov}(W_t(\phi),W_s(\psi)) = (t\wedge s)\int\phi(x)\psi(x)dx$. 由此在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的范数下可以定义 $\mathbb{R}^d$ 上一个随机测度,从而 $\{W_t(B): t\geqslant 0, B$ 有界可测$\}$ 是定义在 $R_+\times\mathbb{R}^d$ 上,强度为 $dtdx$ 的白噪声. 这个 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$- 值 $\{W_t: t\geqslant 0\}$ 称为 **柱集 Brown 运动**(cylindrical Brownian motion).

例2 $B(A,c)$-超过程 设 E 是紧距离空间,A 是 E 上 Feller 半群对应的无穷小算子. $\Psi(x,\lambda)=c(x)\lambda^2$,其中 c 是非负函数. 相应的超过程称为 $B(A,c)$-超过程. 对于 $\phi\in pD(A)$, $\theta\in\mathbb{R}$, 则由(4.1.9)可知,

$$\exp\left\{\theta\left[\langle X_t,\phi\rangle - \int_0^t\langle X_s,A\phi\rangle ds\right] - \theta^2\int_0^t\langle X_s,c\phi^2\rangle ds\right\}$$

是连续局部鞅. 因此,对于 $\phi\in D(A)$,

$$M_t^B(\phi) := \langle X_t,\phi\rangle - \langle X_0,\phi\rangle - \int_0^t\langle X_s,A\phi\rangle ds$$

是 $\{\mathscr{D}_t\}$-鞅,其增过程是

$$\langle M^B(\phi)\rangle_t = 2\int_0^t\langle X_s,c\phi^2\rangle ds$$

及

$$\langle M^B(\phi),M^B(\psi)\rangle_t = 2\int_0^t\langle X_s,c\phi\psi\rangle ds,\ \phi,\psi\in D(A).$$

由于 $D(A)$ 在 $C(E)$ 中稠,从而在 $b\mathscr{B}(E)$ 中也是稠的,通过极限我们可以定义 $M^B(\phi)$, $\phi\in b\mathscr{B}(E)$. 这样得到连续正交鞅测度 $M^B(ds,dx)$,且其强度为 $\nu((0,t)]\times A) = 2\int_0^t\langle X_s,c1_A\rangle ds$.

例3 (A,Ψ)-超过程 考虑 (A,Ψ)-超过程 $\{X_t\}$. 我们知道对于任何 $\phi\in D(A)$,

$$M_t(\phi) := \langle X_t,\phi\rangle - \langle X_0,\phi\rangle - \int_0^t\langle X_s,A\phi\rangle ds$$

是局部鞅,而且可以分解为

$$M_t(\phi) = M_t^c(\phi) + M_t^d(\phi),$$

其中$M_t^c(\phi)$是连续局部鞅部分，$M_t^d(\phi)$是不连续局部鞅. 且具有可料的补偿因子

$$\int_0^t ds\int X_s(dx)\int_0^\infty \nu(x,du)(\exp(-u\phi(x)) - 1 + u\phi(x)).$$

值得注意的是，一般地 $M_t(\phi)$不一定能够产生一个 L^2-鞅测度，这是由于 $M_t^d(\phi)$不一定属于 $L^2(P^\mu)$.

4.2.3 鞅测度的随机积分

下面我们来定义鞅测度的随机积分. 设 M 是一个有价值的鞅测度，其控制测度为 K. 对于 $f,g\in b\mathscr{B}(E)\times\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$，定义

$$(f,g)_K := \iiint_{E\times E\times R_+} f(x,s)g(y,s)K(dx,dy,ds),$$

而且对于可料的 f，$\|f\|_M := E(|f|,|f|)_K$. 设

$$\mathscr{P}_M := \{f(\omega,s,x):\mathscr{P}\times\mathscr{B}(E)\text{ 可测},\|f\|_M < \infty\}.$$

如果 M 是具有强度 ν 的正交鞅测度，令

$$\mathscr{P}_M := L_\nu^2 = \Big\{f(\omega,s,x):\mathscr{P}\times\mathscr{B}(E)\text{ 可测},$$

$$E\Big(\int_{R_+\times E} f^2(\omega,s,x)\nu(\omega,ds,dx)\Big) < \infty\Big\},$$

简单可料函数簇

$$S := \Big\{h(\omega,s,x) = \sum_{i=1}^n h_i(\omega)1_{(u_i,v_i]}(s)1_{B_i}(x),B_i\in\mathscr{A},h_i\in b\mathscr{F}_{u_i}\Big\},$$

那么 S 在 $\mathscr{P}_M$ 中稠（参见文献[194]，Prop. 2. 3).

由一般的随机积分的定义方法，我们从简单函数开始. 如果 $h\in S$，我们定义一个新的鞅测度

$$h\cdot M_t(A) = \Big(\int_0^t hdM\Big)(A) \tag{4.2.3}$$

$$:= \sum_{i=1}^n h_i(M_{v_i\wedge t}(A\cap B_i) - M_{u_i\wedge t}(A\cap B_i)),\forall A\in\mathscr{A}.$$

我们可以证明 $E(h\cdot M_t(A))^2\leqslant\|h\|_M^2$.

由于 S 在 $\mathscr{P}_M$ 中稠，可以通过取 S 中序列 $\{h_m\}$ 使之$\|h_m - h\|$

$\to 0$把线性映射 $h \to \{h \cdot M_t(A), t \geq 0, A \in \mathscr{A}\}$ 推广到 $h \in \mathscr{P}_M$，并记 $h \cdot M$ 为 $h_m \cdot M$ 在 L^2 下的极限. 不难验证极限与序列 $\{h_m\}$ 的选取无关. 这样称 $h \cdot M$ 为 h 关于 M 的**随机积分鞅测度**. 可料过程 h 关于鞅测度 M 的通常随机积分是指 $h \cdot M_t(E)$，一般表示为 $\int_0^t \int_E h(s, x) M(ds, dx)$.

定理4.2.9 设 M 是有价值的鞅测度，$f \in \mathscr{P}_M$. 则

(a) $f \cdot M$ 是有价值鞅测度. 如果 M 是连续的，则 $f \cdot M$ 也是连续的.

(b) 如果 $f, g \in \mathscr{P}_M$，$A, B \in \mathscr{A}$，则

$$\langle f \cdot M(A), g \cdot M(B) \rangle_t = \int_{(0,t]} \int_{A \times B} f(s, x) g(s, y) Q_M(dx, dy, ds). \tag{4.2.4}$$

如果 M 是正交的，

$$\langle f \cdot M(A), g \cdot M(B) \rangle_t = \int_{(0,t]} \int_{A \times B} f(s, x) g(s, y) \nu(ds, dx). \tag{4.2.5}$$

证明 见文献[194]Ch. 2. □

定理4.2.10

(a) 设 A_t 是连续递增的适应过程，则如下两个论断是等价的：

(i) M_t 是连续局部鞅，其增过程为 A_t，

(ii) 对于任一 $\theta \in \mathbb{R}$，$Z_t(\theta) := \exp\left[\theta M_t - \frac{1}{2}\theta^2 A_t\right]$ 是连续局部鞅.

进一步，若 $Z_t(\theta)$ 是一个上鞅，则它是鞅当且仅当 $E[Z_t(\theta)] = 1$，$t \geq 0$.

(b) 如果 M_t 是局部鞅，且若 $E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 A_t\right)\right] < \infty$，$t \geq 0$ 或 $\exp\left(\frac{1}{2}\theta M_t\right)$ 是半鞅，则 $Z_t(\theta)$ 是鞅.

(c) 设 M 是 E 上有价值的连续鞅测度，其协变差泛函为 $Q(t; \cdot, \cdot)$，控制测度是 K. $f \in \mathscr{P}_M$，则 $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$，$\forall\ f \in \mathscr{P}_M$，

$$Z_t(\theta):=\left(\exp\left\{\int_0^t\int_E\theta f(s,x)M(ds,dx)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\int_0^t\int_E\int_E\theta^2 f(s,x)f(s,y)Q(ds;dx,dy)\right\}\right)\qquad(4.2.6)$$

是连续局部鞅. 若 $E[Z_t(\theta)]=1,\forall\ t\geqslant 0$,则它是鞅.

证明 (a)与(b)的证明分别见文献[92],p. 142和[166],p. 309. (c)由(a),(b)及定理4.2.9可证. □

§4.3 $B(A,c)$-超过程的轨道连续性

设 E 是 Polish 空间,其一点紧化记为 $\bar{E}$,$(A,D(A))$表示 $\bar{E}$ 上 A-Feller 过程的算子. $B(A,c)$-超过程是以 A-Feller 过程为底过程,分枝率为 $\kappa(ds)=ds$,分枝机制为 $\Psi(x,\lambda)=c(x)\lambda^2$对应的超过程,其对应非线性半群满足方程

$$V_t\phi=S_t\phi-\int_0^t S_{t-s}c(V_s\phi)^2ds.\qquad(4.3.1)$$

我们应用 $B(A,c)$-超过程鞅性,来考虑它的轨道连续性.

在前面的讨论中我们知道,$B(A,c)$超过程有很好的性质,例如,它有任意阶矩并且在§3.5给出了任意阶矩公式. 这使得我们可以进一步研究其性质. 首先,我们有

定理4.3.1 假设$\{f_n,n\in N\}\in pbC(E)$是决定类. 定义

$$d(\mu,\nu):=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\left(1\wedge\left|\int f_n d\mu-\int f_n d\nu\right|\right).\qquad(4.3.2)$$

设$\{X_t:t\geqslant 0\}$是紧集 $\bar{E}$ 上的 $B(A,c)$-超过程. 则对于 $\mu\in M_F(\bar{E})$,$\{X_t:t\geqslant 0\}$是 P^μ-a. s. 轨道连续的(即样本轨道属于 $C([0,\infty),M(\bar{E}))$),而且对于任意 $\beta<1/4$,$\{X_t:t\geqslant 0\}$是 β 阶 Hölder 连续(关于(4.3.2)给出的距离 d).

证明 设$\{f_n\}$是 $\bar{E}$ 的决定类. 由定理3.5.8可证,对于任意 $T>0,n\in N$,

$$P^\mu[\langle X_t,f_n\rangle-\langle X_s,f_n\rangle]^4\leqslant C_T(t-s)^2,0\leqslant s\leqslant t\leqslant T,$$
$$(4.3.3)$$

其中 C_T 为依赖 T 的常数.由推论1.8.3即知结论成立. □

应用鞅特征,我们可以把上述结果加强为

定理4.3.2 假设 $\{f_n, n\in\mathbb{N}\}\in pD(A)$ 是决定类,且 $(\|f_n\|+\|Af_n\|)\leqslant 1$,则对于任意 $\beta<1/2$,$\{X_t:t\geqslant 0\}$ 是 β 阶 Hölder 连续的(关于距离 d).

证明 设 $\phi\in D(A)$,则由定理4.1.2及引理4.5.1知

$$M_t(\phi) := \langle X_t,\phi\rangle - \langle X_0,\phi\rangle - \int_0^t \langle X_s, A\phi\rangle ds$$

是鞅,定理4.3.1还说明它是连续的.则 M_t 可以延拓成一个连续鞅测度 $M(ds,dx)$.对 $\psi(s,x)=S_{t-s}\phi(x)$,$0\leqslant s\leqslant t$ 应用 Itô 公式,对于 $\phi\in D(A)$,

$$\langle X_t,\phi\rangle - \langle X_0, S_t\phi\rangle = \int_0^t\int S_{t-s}\phi(x)M(ds,dx) =: \hat{X}_t(\phi).$$

由有界逐点收敛定理,上式可以扩张到 $b\mathscr{B}(E)$.进一步若 $\phi:\mathbb{R}\times E\to\mathbb{R}$ 有界可测,则 $\int_0^t\int \phi(s,x)M(ds,dx)$ 是连续鞅,其增过程为

$$2\int_0^t\int c(x)\phi^2(s,x)X_s(dx)ds.$$

再由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式(参见[166],p. 151),对于 $q>0$,

$$\begin{aligned}&P^\mu\left|\int_0^t\int\phi(s,x)M(ds,dx)\right|^q\\&\qquad\leqslant C_qP^\mu\left(\int_0^t\int 2c(x)\phi^2(s,x)X_s(dx)ds\right)^{q/2}.\end{aligned}\tag{4.3.4}$$

因此,对于 $q\geqslant 2$,$0\leqslant s<t\leqslant T$,$\phi\in D(A)$,

$$\begin{aligned}&(P^\mu|\hat{X}_t(\phi)-\hat{X}_s(\phi)|^q)^{1/q}\\&\quad\leqslant\left[P^\mu\left|\int_s^t\int S_{t-u}\phi(x)M(du,dx)\right|^q\right]^{1/q}\\&\qquad+\left[P^\mu\left|\int_0^s\int(S_{t-u}\phi(x)-S_{s-u}\phi(x))M(ds,dx)\right|^q\right]^{1/q}\\&\quad\leqslant C_q\left[\left(P^\mu\left(\int_s^t\int\langle X_u,2c(S_{t-u}\phi)^2\rangle du\right)^{q/2}\right)^{1/q}\right.\end{aligned}$$

$$+\left(P^{\mu}\left(\int_0^s\int\langle X_u,2c(S_{s-u}(S_{t-s}\phi-\phi))^2\rangle du\right)^{q/2}\right)^{1/q}\Big]$$

(由(4.3.4))

$$\leqslant C_q\Big[\big(\sup_{u\leqslant t}P^{\mu}\langle X_u,1\rangle^{q/2}(2\|c\|\|\phi\|^2)^{q/2}(t-s)^{q/2}\big)^{1/q}$$

$$+\big((t-s)^{q/2}s^{q/2}\sup_{u\leqslant t}P^{\mu}\langle X_u,1\rangle^{q/2}(2\|c\|\|A\phi\|^2)^{q/2}\big)^{1/q}\Big]$$

$$\leqslant C(T)(\|\phi\|+\|A\phi\|)(t-s)^{1/2}.$$

即是

$$P^{\mu}|\hat{X}_t(\phi)-\hat{X}_s(\phi)|^q\leqslant C(\|\phi\|,\|A\phi\|,T)(t-s)^{q/2}. \tag{4.3.5}$$

由此及推论1.8.3不难证明所要结论成立. □

注4.3.3 由该定理可以看出,超过程的轨道连续性(在弱拓扑下)和底过程的轨道性质没有直接关系,但和底过程的半群及其无穷小算子却有一定的联系. 显然,定理中假设 $D(A)$包含一个决定类是比较强的,但一般具有强连续半群的 Markov 过程都满足此条件. 由此可以看出,若底过程的半群是强连续的,则 $B(A,c)$轨道连续.

注4.3.4 (a)Reimers(1989)[165]对超 Brown 运动$(X_t,t\geqslant 0)$证明了,对于 $\phi\in b\mathscr{B}(E)$,$\langle X(t),\phi\rangle$在$(0,\infty)$上是 a.s. 连续的. Pérkins(1991)[158]把这一结果推广到更一般的 Hunt 过程. 这就是说,$X(t)$关于$\sigma(M_F(E),b\mathscr{B}(E))$-拓扑①也是连续的.

(b)当底过程是 Feller 过程时,Roelly-Coppoletta(1986)[167], El Karoui-Roelly-Coppoletta(1991)[56]用鞅方法讨论了轨道连续性. 如果ξ是右(Hunt)过程,Fitzsimmons(1988)[63]应用 Ray-紧化及 Rost 的 Skorokhod 嵌入定理,讨论了(ξ,Ψ)-超过程的正则性(右过程、Hunt 过程). 根据 Bakry 与 Emery(1985)[5]的结果,他还得到超过程的几乎处处连续性当且仅当 $n\equiv 0$. Dynkin(1993)[40,46]用不同的方法研究了超过程的正则性. 赵学雷(1994)[228]通过推广 Dynkin(1989)[39]的可加泛函表示,也独立地得到当 c 不为常数时

① 对于任意 $f\in b\mathscr{B}(E)$,使得映射 $\mu\to\langle\mu,f\rangle$连续的极小拓扑.

超过程的连续性.

(c)对于 $\phi\in\mathscr{B}(E)$,$\langle X_t,\phi\rangle$不一定是半鞅,参见 R. Tribe 博士学位论文(1989),Theorem 3.2.

§4.4 占位时过程

超过程研究的一个重要方面就是占位时过程.本节将给出超过程占位时过程的定义及其刻画.

定义4.4.1 记(X_t,P^μ)是(ξ,κ,Ψ)-超过程$(\kappa(dt)=dt)$,对于任一 $t>0$定义

$$Y_t(A):=\int_0^t X_s(A)ds, A\in\mathscr{E}. \tag{4.4.1}$$

称 Y_t 为 X_t 的**占位时过程**.

由于 $X_s(A)$的可测性知上面的定义总是有意义的,同时 Y_t 是 E 上的(随机)有限测度.

定理4.4.2 设 $\psi,\phi\in pbC(E)$,$\mu\in M_F(E)$,则

$$P^\mu(\exp\{-[\langle X_t,\phi\rangle+\langle Y_t,\psi\rangle]\})=\exp(-\langle\mu,U_t^\phi\psi\rangle), \tag{4.4.2}$$

其中 $U_t^\phi\psi$ 是初值问题

$$\frac{\partial}{\partial t}u=Au-\Psi(u)+\psi,u(0,x)=\phi \tag{4.4.3}$$

的唯一解(mild-解)①.其中 Ψ 由(3.2.5)给出.

证明 假定 $\psi(\cdot,x)\in pbC^1(\mathbb{R}_+)$,$\psi(t,\cdot)\in D(A)$.如果 $f\in bC^\infty(\mathbb{R})$,则由 Itô 公式

$$f(\langle X_t,\psi(t)\rangle)-\int_0^t\Big(f'(\langle X_s,\psi(s)\rangle)\Big\langle X_s,A\psi(s)+\frac{\partial\psi}{\partial s}\Big\rangle$$

$$+f''(\langle X_s,\psi(s)\rangle)\langle X_s,c\psi^2(s)\rangle\Big)ds$$

$$-\int_0^t\langle X_s,\int_0^\infty\nu(\cdot,d\lambda)(f(\langle X_s,\psi(s)\rangle+\lambda\psi(s,\cdot))$$

① 同§3.2的讨论,可以证明该方程存在唯一解.当 ϕ,ψ 非负时,解也非负.

$$-f(\langle X_s,\psi(s)\rangle)-f'(\langle X_r,\psi(s)\rangle)\lambda\psi(s,\cdot)\rangle)ds$$

(4.4.4)

是鞅.

对于 $\phi\in pbD(A),\psi\in pbC(E)$,设 $u(t,x)$是如下发展方程:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)=Au(t,x)-\Psi(u(t,x))+\psi(x),u(0,x)=\phi \quad (4.4.5)$$

的唯一解. 应用(4.4.4)于函数 $f(u)=e^{-u}$及 $\psi(s,x):=u(t-s,x)$,则有

$$\exp\{-\langle X_s,\psi(s)\rangle\}-\int_0^t\exp\{-\langle X_r,\psi(r)\rangle\}\langle X_r,\psi\rangle dr$$

限制在$[0,t]$上是 P^μ-鞅. 由引理4.1.7,

$\exp\{-\langle X_s,\psi(s)\rangle-\langle Y_s,\psi\rangle\}$是$[0,t]$上的 P^μ-局部鞅.

由有界收敛定理知它是鞅. 因此

$$P^\mu\exp\{-[\langle X_t,\phi\rangle+\langle Y_t,\psi\rangle]\}=\exp\{-\langle\mu,u(t,\cdot)\rangle\}.$$

再注意到 $D(A)$ 在 $C(E)$中稠,故上式对所有 $\phi,\psi\in pbC(E)$ 成立. □

采用与§3.5类似的讨论,我们也可以得到占位时过程的矩. 实际上,我们有

定理4.4.3 设 Y_t 是 $B(A,c)$超过程的占位时过程,对于 $\phi\in pb\mathscr{B}(E)$,则 $\mu\in M_F(E)$,

$$P^\mu\langle Y_t,\phi\rangle^n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(n-k)!\Phi_{n-k}(t)P^\mu\langle Y_t,\phi\rangle^k, \quad (4.4.6)$$

其中 $\Phi_k(t)=\langle\mu,\phi_t^{k*}\rangle$, 而 $\phi_t^{1*}:=\phi_t\equiv\int_0^t S_s\phi ds,\phi_t^{n*}:=\sum_{k=1}^{n-1}(\phi^{k*}*\phi^{(n-k)*})_t$ 卷积"$*$"定义为:对于 $\phi_t,\psi_t\in pb\mathscr{B}(E)$, $t>0$,

$$(\phi*\psi)_t=\int_0^t S_s(2c\phi_{t-s}\psi_{t-s})ds. \quad (4.4.7)$$

特别地

$$P^\mu\langle Y_t,\phi\rangle=\left\langle\mu,\int_0^t S_s\phi ds\right\rangle; \quad (4.4.8)$$

$$P^\mu\langle X_t,\phi\rangle^2=\left\langle\mu,\int_0^t S_s\phi ds\right\rangle^2+\left\langle\mu,2\int_0^t dsS_sc\left(\int_0^{t-s}S_u\phi du\right)^2\right\rangle.$$

(4.4.9)

证明 与定理3.5.7、定理3.5.8之证明类似.详细证明留给读者. □

注4.4.4 Iscoe[93,94]首先研究了占位时过程.本节应用超过程的鞅性给出了占位时过程的特征表示.这要比 Iscoe(1998)的半群方法简单得多.

这里,我们是基于超过程来定义其占位时过程的.当然像我们构造超过程那样,也可以由分枝粒子系统来逼近占位时过程.直观上来讲,占位时过程 $Y_t(A)$可以看成在时间区间$[0,t]$内分枝粒子系统到达 A 的次数的正规化极限.有关细节可参见文献[79].

注4.4.5 比占位时过程更广的概念是可加泛函.Dynkin(1989,1991,1992,1995,1996)对此有一系列的工作.由于其中涉及到 Mokobodzki 的"中间极限"(medial limit)(参见文献[34],§X.55—X.57),超出了本书的研究范围,故在此不做具体介绍.

§4.5 测度值分枝过程的 C-M-G 公式

本节考虑连续超过程鞅问题的 Cameron-Martin-Girsanov 公式.先从 Polish 空间 E 上连续测度值分枝过程的鞅问题开始.

假定 $D(A)$是 $bC(E)$的一个稠子空间,$A:D(A)\to bC(E)$,Q: $M_F(E)\to Q_F(E\times E)$,其中 $Q_F:=\{\nu;E$ 上符号测度,满足$0\leqslant\nu(A\times A)<\infty,A\in\mathscr{E}\}$.

令 $\mathscr{D}(\mathscr{G}):=\{F;F(\mu):=f(\langle\mu,\phi\rangle),\phi\in D(A),f\in C_b^\infty(\mathbb{R})\}$,对于 $F\in\mathscr{D}(\mathscr{G})$,

$$\mathscr{G}F(\mu):=f'(\langle\mu,\phi\rangle)\langle\mu,A\phi\rangle+\frac{1}{2}\iint f''(\langle\mu,\phi\rangle)\phi(x)\phi(y)Q(\mu;dx,dy).$$

引理4.5.1 假定 $Q(\mu;A,A)\leqslant K\mu(A)$,$\forall\ A\in\mathscr{E}$,这里 K 是一个常数.令 P 是$(D_E,\mathscr{D},(\mathscr{D}_t)_{t\geqslant0})$上概率测度,$D_E=D([0,\infty),E)$.设$\{X_t\}$是连续的 $M_F(E)$-过程,则下列几个结论等价:

(i)$\forall\ F\in\mathscr{D}(\mathscr{G})$,$\overline{M}_t(F):=F(X_t)-F(X_0)-\int_0^t\mathscr{G}F(X_s)ds$

是 P- 局部鞅，

(ii) $\forall\ \phi\in D(A), M_t(\phi):=\langle X_t,\phi\rangle-\langle X_0,\phi\rangle-\int_0^t\langle X_s,A\phi\rangle ds$

是 P- 局部鞅，其变差过程为

$$\int_0^t\iint\phi(x)\phi(y)Q(X_s;dx,dy)ds,$$

(iii) $\forall\ \phi\in D(A)$,

$$Z_t(\phi):=\exp\left\{\langle X_t,\phi\rangle-\langle X_0,\phi\rangle-\int_0^t\langle X_s,A\phi\rangle ds\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int_0^t\iint\phi(x)\phi(y)Q(X_s;dx,dy)ds\right\}$$

是 P-局部鞅.

证明 (i)与(ii)的等价性由 Itô 公式即得. (ii)与(iii)的等价性由定理4.2.10可得.

下面我们将引入测度值分枝过程的 Cameron-Martin-Girsanov 公式. 首先回顾 $B(A,c)$-超过程 X_t 的鞅刻画. 由定理4.1.2，X_t 是 $M_F(E)$-值过程而且

$$M_t^B(\phi)=\langle X_t,\phi\rangle-\langle X_0,\phi\rangle-\int_0^t\langle X_s,A\phi\rangle ds,\phi\in D(A),$$

是平方可积鞅，其增过程为

$$\langle M^B(\phi)\rangle_t=\int_0^t\langle X_s,2c\phi^2\rangle\, ds,$$

即 $Q(\mu;dx,dy)=2c(x)\delta_x(dy)\mu(dx)$.

设 $R:M_F(E)\to M_F(E)$ 为可测映射，

$$R(\mu,dx)=\int_E r(\mu,y)Q(\mu;dx,dy),\tag{4.5.1}$$

其中 $r\in b\mathscr{B}(M_F(E)\times E)$ 并设

$$\sup_{\mu,x}|r(\mu,x)|:=K<\infty.\tag{4.5.2}$$

对于 $F(\mu)\in\mathscr{D}(\mathscr{G})$，令

$$\mathscr{G}_RF(\mu):=f'(\langle\mu,\phi\rangle)[\langle\mu,A\phi\rangle+\langle R(\mu),\phi\rangle]$$
$$+\frac{1}{2}\iint f''(\langle\mu,\phi\rangle)\phi(x)\phi(y)Q(\mu;dx,dy).$$

我们有

定理4.5.2 假设 $R(\mu,dx)=2c(x)r(\mu,x)\mu(dx)$，而 r 满足(4.5.2)，则$(\mathscr{G}_R,\mathscr{D}(\mathscr{G}))$-鞅问题适定当且仅当$(\mathscr{G},\mathscr{D}(\mathscr{G}))$-鞅问题适定．如果$\{\Pi_{[0,T]}P^{\mu}:\mu\in M_F(E)\}$和$\{\Pi_{[0,T]}P^{\mu}_R:\mu\in M_F(E)\}$分别是上述鞅问题的解在 $\mathscr{D}_T$ 上的限制，则对于任一 μ，$\Pi_{[0,T]}P^{\mu}$ 与 $\Pi_{[0,T]}P^{\mu}_R$ 是等价测度，而且其 Radon-Nikodym 导数

$$Z_r(T):=\frac{d\Pi_{[0,T]}P^{\mu}_R}{d\Pi_{[0,T]}P^{\mu}},\Pi_{[0,T]}P^{\mu}\text{-a. s.}$$

由下式给出：

$$Z_r(t):=\exp\left\{\int_0^t\int_E r(X_s,y)M(ds,dy)\right.$$

$$\left.-\int_0^t\int_E[r(X_s,x)]^2c(x)X_s(dx)ds\right\},\quad(4.5.3)$$

其中 $M(ds,dy)$是由 M_t^B 导出的鞅测度．

为证该定理，先证一个引理．

引理4.5.3 在定理4.5.2的条件下，$Z_r(t)$是 P^{μ}-鞅．

证明 由定理4.3.1，X_t 连续，$r\in\mathscr{P}_M$ 有界可测，所以由定理4.2.9(a) 知随机积分$\int_0^t\int_E r(X_s,y)M(ds,dy)$ 是连续的，其增过程为

$$\int_0^t\int_E 2c(x)r^2(X_s,x)X_s(dx)ds<2\|c\|K^2\int_0^t\langle X_s,1\rangle ds<\infty.$$

P^{μ}-a.s. 由定理4.2.10中的结论(c)知，$Z_r(t)$是 P^{μ}-局部鞅．现往证它是鞅，只需证明$\forall\, t\geqslant 0$，$P^{\mu}[Z_r(t)]=1$．为此取 $\tau_n:=\inf\{u:\int_0^u\langle X_s,1\rangle ds\geqslant n\}$．易知，当 $n\to\infty$时，$\tau_n\uparrow\infty$，P^{μ}-a. s. 固定 t，令

$$B_n:=\{\tau_n\leqslant t\}=\left\{\int_0^t\langle X_{s\wedge\tau_n},1\rangle ds\geqslant n\right\}.$$

则 $Z_r(u\wedge\tau_n)$是连续 P^{μ}-局部鞅而且

$$P^{\mu}\left[\exp\left(\int_0^{t\wedge\tau_n}\int_E c(x)r^2(X_s,x)X_s(dx)ds\right)\right]\leqslant\exp(\|c\|K^2n).$$

应用定理4.2.10(b)，我们断言 $Z_r(u\wedge\tau_n)$也是 P^{μ}-鞅，因而

$$P^{\mu}[Z_r(t\wedge\tau_n)] = P^{\mu}[1_{B_n}Z_r(\tau_n)] + P^{\mu}[1_{B_n^c}Z_r(t)] = 1.$$

注意到当 $n\to\infty$时，$\tau_n\uparrow\infty$，P^{μ}-a. s.，则 $P^{\mu}[1_{B_n^c}Z_r(t)]\uparrow P^{\mu}[Z_r(t)]$.

另一方面，定义

$$P_R^{\mu}(B):=Z_r(T)P^{\mu}(B), B\in\mathscr{D}_T. \tag{4.5.4}$$

可证

$$P_R^{\mu}(B_n) = P^{\mu}[1_{B_n}Z_r(\tau_n)] \leqslant n^{-1}P_R^{\mu}\left\{\int_0^t \langle X_{s\wedge\tau_n},1\rangle ds\right\}.$$

对于 $\phi\in D(A)$，取

$$M_u^R(\phi):=\langle X_u,\phi\rangle - \langle X_0,\phi\rangle - \int_0^u\langle X_s,A\phi\rangle ds$$

$$-\int_0^u\langle R(X_s),\phi\rangle ds.$$

由 Itô 公式，在 P_R^{μ} 下 $M_{u\wedge\tau_n}^R$ 是鞅. 特别地取 $\phi\equiv1$，我们有

$$P_R^{\mu}\langle X_{u\wedge\tau_n},1\rangle = \langle\mu,1\rangle + P_R^{\mu}\int_0^{u\wedge\tau_n}\langle R(X_{s\wedge\tau_n}),1\rangle ds$$

$$\leqslant \langle\mu,1\rangle + KP_R^{\mu}\int_0^u\langle X_{s\wedge\tau_n},1\rangle ds.$$

因而由 Gronwall 不等式得 $P_R^{\mu}(\langle X_{t\wedge\tau_n},1\rangle)\leqslant\langle\mu,1\rangle e^{Kt}$，从而

$$P_R^{\mu}\left(\int_0^t\langle X_{u\wedge\tau_n},1\rangle du\right)\leqslant K^{-1}\langle\mu,1\rangle(e^{Kt}-1),$$

也即是

$$P^{\mu}[1_{B_n}Z_r(\tau_n)]\leqslant n^{-1}K^{-1}\langle\mu,1\rangle(e^{Kt}-1)\to 0, n\to\infty.$$

所以 $P^{\mu}[Z_r(t)]=1$，$\forall\, t\geqslant0$，从而 $Z_r(t)$是鞅. □

下面来证定理4.5.2. 首先假设$(\mathscr{G},D(\mathscr{G}))$-鞅问题是适定的，其解为$\{P^{\mu}\}$. 如(4.5.4)定义 P_R^{μ}，则

$$\frac{d\Pi_{[0,t]}P_R^{\mu}}{d\Pi_{[0,t]}P^{\mu}} = Z_r(t),$$

且由引理4.5.3知 $Z_r(t)$是鞅，从而 P_R^{μ} 是 $\mathscr{D}_t$ 上的概率测度.

定义 $g(\mu):=\phi+r(\mu)$，$\phi\in bD(A)$，则

$$Z_g(t) = Z_r(t)\cdot\exp\left\{\int_0^t\int\phi(x)M(ds,dx)\right.$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_0^t \iint \phi(x) r(X_s; y) Q(X_s; dx, dy) ds \\
&- \frac{1}{2}\int_0^t \iint \phi(x)\phi(y) Q(X_s; dx, dy) ds \Big\} \\
= &Z_r(t) \cdot \exp\Big\{ \int_0^t \int \phi(x) M(ds, dx) \\
&- \int_0^t \iint \phi(x) R(X_s; dx) ds \\
&- \frac{1}{2}\int_0^t \iint \phi(x)\phi(y) Q(X_s; dx, dy) ds \Big\}
\end{aligned}
$$

是 P^μ-鞅. 因而

$$
\exp\Big\{ \int_0^t \int \phi(x) M(ds, dx) - \int_0^t \int \phi(x) R(X_s; dx) ds - \frac{1}{2}\int_0^t \iint \phi(x)\phi(y) Q(X_s; dx, dy) ds \Big\} \tag{4.5.5}
$$

是 P_R^μ 鞅. 事实上,由于 $dP_R^\mu|\mathscr{D}_t = Z_r(t) dP^\mu|\mathscr{D}_t$ 及 $Z_r(t)$ 是 P^μ-鞅,

$$
P_R^\mu|\mathscr{D}_t|\mathscr{D}_s = P^\mu[Z_r(t)|\mathscr{D}_s] dP^\mu|\mathscr{D}_s = dP^\mu|\mathscr{D}_s, s < t.
$$

换句话说,(4.5.5)说明了

$$
\begin{aligned}
\exp\Big\{ &\langle X_t, \phi\rangle - \langle X_0, \phi\rangle - \int_0^t \langle X_s, A\phi(x)\rangle ds \\
&- \int_0^t \int \phi(x) R(X_s; dx) ds \\
&- \frac{1}{2}\int_0^t \iint \phi(x)\phi(y) Q(X_s; dx, dy) ds \Big\}
\end{aligned}
$$

是 P_R^μ-鞅. 从而由引理4.5.1,P_R^μ 是$(\mathscr{G}_R, D(\mathscr{G}))$- 鞅问题的一个解. 剩下需证唯一性. 设 P_R^μ 表示$(\mathscr{G}_R, \mathscr{D}(\mathscr{G}))$-鞅问题的一个解. 取

$$
\begin{aligned}
Z_{-r}^R: = \exp\Big\{ &\int_0^t \int_E - r(X_s, y) M_R(ds, dy), \\
&- \frac{1}{2}\int_0^t \int_E \int_E r(X_s, x) r(X_s, y) Q(X_s; dx, dy) ds \Big\},
\end{aligned}
$$

其中 M_R 是由$(\mathscr{G}_R, \mathscr{D}(\mathscr{G}))$-鞅

$$
M_{R,t}(\phi): = \langle X_t, \phi\rangle - \langle X_0, \phi\rangle - \int_0^t (\langle X_s, A\phi\rangle + \langle R(X_s), \phi\rangle) ds
$$

生成. 那么同上讨论,

$$\Pi_{[0,t]}P^{\mu} = Z_{-r}^{R}(t)\Pi_{[0,t]}P^{\mu R},$$

而且 $Z_{-r}^{R}(t)>0$，P_R^{μ}-a.s. 这就意味着

$$\frac{dP^{\mu}}{dP_R^{\mu}}\Big|\mathscr{D}_t = Z_{-r}^{R}(t).$$

于是 P^{μ} 的唯一性也就说明了 P_R^{μ} 的唯一性.

反之，同理可证. □

注4.5.4 $(\mathscr{G}_R,\mathscr{D}(\mathscr{G}))$-鞅问题的解确定了样本空间 $C(\mathbb{R}_+, M_F(E))$上的测度值过程. 这个过程又常称为**具有交互作用的测度值分枝过程**(measure-valued branching processes with interactions)，称 $r(\mu,x)$ 为**交互作用率**. 从粒子系统的观点来看，r 反映了粒子之间的演化不独立性与适者生存的能力. 当然这里讨论的情况是比较特殊的，一般的具有交互作用的测度值过程是目前国际上的研究热点，仍有很多基本问题有待解决(参见§12.1或文献[208]). 当 r 不依赖于测度 μ 时，则相应的测度值分枝过程即为超过程. 其分枝特征为

$$\Psi(\lambda,x) = r(x)\lambda + c(x)\lambda^2, \lambda > 0, x \in E.$$

文献评注：§4.1的内容主要参考了文献[19,167,56]以及[71]. 在§4.2随机积分的定义中，不加证明地引用了文献[194,60,88]等的鞅论及鞅测度的结果. 采用鞅方法论述有关超过程的轨道连续性及其占位时过程的刻划，要比单纯用矩估计(参见[209,229]等)和[93－95]的半群逼近要简单得多，当然这种思想来自于文献[19]. 超过程鞅测度的 Cameron-Martin-Girsanov 公式取材于[19]，但对定理的叙述与证明做了较大的改动. 张新生在[222]中讨论了缓增空间超过程的鞅刻画.

第五章　二分枝超过程的 Le Gall 构造方法

Neveu-Pitman (1989) (参见文献[145], §2) 证明了一维 Brown 运动轨道的水平大于 x,高度大于 h 的游程具有二分枝树的结构. Le Gall 利用反射 Brown 运动轨道的这种二分枝树特征,来构造二分枝超过程. 本章,我们主要是介绍这种构造方法. 事实表明,这种构造方法对研究超过程的某些性质提供了很大的方便. 为了让读者有一个大致的印象,首先介绍 Le Gall "Brown 蛇"①构造超过程的基本思想. Brown 蛇的定义见注5.2.6.

设 $\overline{\omega}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 是 Hölder 连续函数,并且满足 $\overline{\omega}(0)=0$. 令

$$K(s,t)\triangleq\inf_{s\leqslant u\leqslant t}\overline{\omega}(u),0\leqslant s<t. \tag{5.0.1}$$

易证 $K(s,t)$ 是非负定的②. 于是对于 $z\in\mathbb{R}^d$,可以构造从 z 出发的 d-维轨道连续的高斯过程 $\{\omega_t,t\geqslant 0\}$,其协方差矩阵为

$$\mathrm{Cov}(\omega_s,\omega_t)=K(s,t)I_d, \tag{5.0.2}$$

其中 I_d 为 d-阶单位阵. 记 $Q^{\overline{\omega}}$ 为该过程在 $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ 中的分布律.

若 $\overline{\omega}$ 为直线上反射 Brown 运动的轨道,记反射 Brown 运动的分布律为 $\mathscr{R}(d\overline{\omega})$. 我们知道, $\mathscr{R}$-几乎所有的 $\overline{\omega}$ 是 Hölder 连续函数. 因此对于反射 Brown 运动的任一轨道 $\overline{\omega}$,都有一个如上定义的高斯过程 $\{\omega_t,t\geqslant 0,Q^{\overline{\omega}}\}$.

考虑反射 Brown 运动 $(\overline{\omega}(t),\mathscr{R})$ 的局部时过程 $\{L_t^a(\overline{\omega}),t\geqslant 0,a\geqslant 0\}$,它具有如下性质:

---

① 在底过程满足一定连续条件下,一般的二分枝超过程同样可由这种构造方法. Dynkin-Kuznetsov(1995)[49]首先引入"Markov 蛇"这一概念,形象地说明了 Le Gall 轨道构造的基本思想. Markov 蛇本身也是一个有意义的研究课题. 最近, Le Gall-Le Jan 试图用 Lévy 过程的轨道去构造一般分枝机制超过程,还没有完全成功,但 Le Gall-Le Jan (1996)[122]向此方向前进了一大步. S. Watanabe 在[210]中说明了我们可以用 Markov 蛇构造分枝特征中含有函数系数的超过程.

② 即对于任何 $n\in N,t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n$,及 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$,均有 $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\lambda_i\lambda_jK(t_i\wedge t_j,t_i\vee t_j)\geqslant 0$.

(i)$\forall\ a\geqslant 0, t\to L_t^a(\bar{\omega})$非降，且仅在$\bar{\omega}(t)=a$处有增量；

(ii)任意可测函数$\psi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+, s\geqslant 0$，

$$\int_0^s \psi(\bar{\omega}(u))du = \int_0^\infty \psi(a)L_s^a(\bar{\omega})da.$$

令

$$\eta(\bar{\omega}) := \inf\{t>0: L_t^0(\bar{\omega})>1\}, \tag{5.0.3}$$

则$\mathscr{R}(d\bar{\omega})$-a.s. $\eta<\infty$.

在$\Omega:=C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)\times C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$上定义概率：

$$P(d\bar{\omega},d\omega) := \mathscr{R}(d\bar{\omega})Q^{\bar{\omega}}(d\omega). \tag{5.0.4}$$

定理5.0.1 设$\{X_t\}_{t\geqslant 0}$定义如下：

$$\langle X_t(\bar{\omega},\omega),\psi\rangle := \int_0^{\eta(\bar{\omega})} ds L_s^t(\bar{\omega})\psi(\omega(s)), \psi\in C_0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d). \tag{5.0.5}$$

则在概率空间$(\Omega,\beta(\Omega),P(d\bar{\omega},d\omega))$上，$\{X_t\}_{t\geqslant 0}$是$M_F(\mathbb{R}^d)$上从$\delta_x$出发，分枝特征为$\Psi(x,\lambda)=2\lambda^2$的超Brown运动. □

下面我们将逐步给出该定理的证明. 比较直观的证明可见文献[117]，一般化的证明可见文献[49]. 为了完成上述定理的证明，首先需要引入一些基本概念. 取轨道值的随机过程(即Markov蛇)是这种超过程构造方法的关键所在. 定理5.0.1将是定理5.3.5的直接推论.

§5.1 连续函数的游程树

在构造Markov蛇以前，我们先来考察连续函数的游程树. 假设$f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$是连续的，且满足

(H1) $f(0)=0, \exists\ \tau:=\tau(f)\in(0,\infty)$，使得$f(\tau)=0, f(t)>0, \forall\ t\in(0,\tau)$.

(H2) $u,v\in\mathscr{L}_f, u\neq v$，则$f(u)\neq f(v)$，其中

$$\mathscr{L}_f := \{u\in[0,\tau), \exists\ \varepsilon>0，使得 f(u)=\inf_{s\in(u-\varepsilon,u+\varepsilon)} f(s)\},$$

即f在$[0,\tau)$中的局部极小点集.

(H2)的直观意义是f在任何$(0,\tau)$的非空子区间上均不是常

数.

定义5.1.1 f 的粗游程(raw excursion)是指一组$(x,(a,b))$满足 $x\geqslant 0$,(a,b)是$(0,\tau)$中的非空区间,且

(i)$f(a)=f(b)=x$;

(ii)$f(u)>x, u\in(a,b)$.

并称其为水平大于 x 的游程.

显然,全体粗游程的集合一般是不可数的,因此需要考虑其商集合.为此,定义等价关系:$(x,(a,b))\sim(x',(a',b'))$当且仅当或者 $x\leqslant x'$,$(a,b)\supset(a',b')$,且

$$\sup_{[a,b]}f(u)=\sup_{[a',b']}f(u),\qquad \sup_{[a,a']}f(u)<\sup_{[a,b]}f(u)$$

或者把$(x,(a,b))$与$(x'(a',b'))$调换次序以上事实成立.

值得注意的是,条件 $\sup_{[a,a']}f(u)<\sup_{[a,b]}f(u)$是为了使得上面定义的等价关系具有传递性.但当 f 的局部极值互不相同时,该条件是不需要的.

以 E_f 表示粗游程的等价类,并简单地称其元素为游程,下面的引理是显然的.

引理5.1.2 设 $e\in E_f$,则存在 e 的唯一表现$(x(e),(a(e),b(e)))$使得,任何其它的表现$(x,(a,b))$均有 $x\geqslant x(e)$,$(a,b)\subset(a(e),b(e))$,而且 $a(e)$或 $b(e)$属于 $\mathscr{L}_f$,映射 $e\rightarrow x(e)$是从 E_f 到 f 所有极小值集 $\mathscr{M}_f$ 上的1-1映射.对于$\forall\ s\in\mathscr{L}_f$,以 $\varrho_f(s)$表示满足 $x(\varrho_f(s))=f(s)$的唯一游程.

在下一节,我们将把 f 的取值看成另一过程的时间变量.在此意义下,$x(e)$将被理解为游程 e 的出生时间,而 e 的死亡时间是 $y(e):=\sup_{[a(e),b(e)]}f(u)$,游程的高度记为 $h(e)=y(e)-x(e)$.取 $e_0=\varrho_f(0)$,即游程$(0,(0,\tau))$.下面定义 E_f 的一个偏序.

定义5.1.3 $e,e'\in E_f$,称 $e<e'$ 当且仅当$(a(e),b(e))\supset(a(e'),b(e'))$.这就意味着 $x(e)\leqslant x(e')$,$y(e)\geqslant y(e')$,从而 $h(e)\geqslant h(e')$.记 $e<<e'$ 如果 $e<e'$ $e\neq e'$ 且当 $e<e''<e'$ 时,有 $e''=e$ 或 $e''=e'$.

由定义可知,给定 $e\in E_f$,要找 $e'<<e$ 的办法是找水平仅仅

小于 $x(e)$，区间包含 $(a(e),b(e))$ 但最大值又不在 $(a(e),b(e))$ 中的游程.

引理5.1.4 对于 $e\in E_f$，则 $\exists\ n\in\mathbb{N}$ 及一个有限序列 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)\subset E_f$，使得

$$e_0<<e_1<<\cdots<<e_{n-1}<<e_n=e, \qquad (5.1.1)$$

且 $e'<e$ 当且仅当存在 $i\in\{0,1\cdots,n\}$，使得 $e'=e_i$. 特别地，n 及序列 $(e_1,\cdots,e_n)$ 是唯一的.

证明 采用反证法. 假若有无穷个互不相同的 $e'<e$，则可选取 E_f 中的序列 $e_0<e_1<e_2<\cdots<e_n<\cdots<e$，使得 $y(e_n)<y(e_{n-1})$，且 $\{[a(e_n),b(e_n)]\}_{n\geqslant1}$ 是严格单调下降的区间. 记 f 在区间 $[a(e_n),b(e_n)]$ 中的最大值点为 $m(e_n)$，即 $f(m(e_n))=\sup_{[a(e_n),b(e_n)]}f(u)$，则 $m(e_n)\notin[a(e_{n-1}),b(e_{n-1})]$，而且 $\{m(e_n)\}_{n\geqslant1}$ 中存在一个收敛子列，仍记为 $\{m(e_n)\}_{n\geqslant1}$，其极限记为 m_0. 另一方面，m_0 也是 $a(e_n)$ 或 $b(e_n)$ 相应子列的极限. 不妨设它是 $\{a(e_n)\}_{n\geqslant1}$ 相应子列的极限，则由函数 f 的连续性和游程的定义，$\max_{[a(e_n),b(e_n)]}f(u)>\lim_{n\to\infty}f(a(e_n))=\lim_{n\to\infty}f(m(e_n))>\max_{[a(e_n),b(e_n)]}f(u)$，矛盾. 所以存在有限的 n 使得(5.1.1)成立. 该引理其它结论显然. □

上述引理清楚地表明，E_f 的偏序结构可以看成 f 游程的树结构. 每个 $e\in E_f$ 代表树的一个枝叉，其高度为 $h(e)$，它生长于 e'，$e'<<e$. 树的根为 e_0.

本节最后，我们给出

定义5.1.5 E_f 的一个子集 F 称为饱和的，若 $e\in F$，$e'<e$ 则有 $e'\in F$. F 的元素 e 称为端点，若 $e'\in F$，$e<e'$ 则 $e=e'$.

§5.2 以树为指标的随机过程

本节，我们旨在定义以函数 f 的游程树为指标的随机过程.

设 ξ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的时齐 Markov 过程. 对于 $e\in E_f$，定义随机过程 $(X^e(t),t\geqslant0)$. 过程 X^e 的生命时为 $y(e)$，其概率分布律在时间 $[0,y(e)]$ 上与 ξ 相同. 若 $e<<e'$，X^e 与 $X^{e'}$ 在时间区间 $[0,$

$x(e)$]上是一致的，而在时间 $x(e)$ 之后，两个过程的运动相互独立. 具体来讲，我们有

命题5.2.1 对于任何的 $e\in E_f$，$\forall\ z\in\mathbb{R}^d$，令

$$X^e(t)=z+\sum_{i=0}^{n-1}1_{(x(e_i),x(e_{i+1})]}(t)(\xi_t^{e_i}-\xi_{x(e_i)}^{e_i})$$
$$+1_{(x(e_n),y(e)]}(t)(\xi_t^e-\xi_{x(e_n)}^e),\qquad(5.2.1)$$

其中 $e_0<<e_1<<\cdots<<e_n=e$ 如引理5.1.4所决定. $\{\xi^{\bar{e}}\}_{\bar{e}\in K_f}$ 是从 z 出发，与 $(\xi_t,t\geqslant0,P_z)$ 同分布，且当 $\bar{e}'<<\bar{e}$ 时，$\xi^{\bar{e}}$ 与 $\xi^{\bar{e}'}$ 在 $[0,x(\bar{e}')]$ 上相同，但 $\xi_t^{\bar{e}}-\xi_{x(\bar{e})}^{\bar{e}}$ 与 $\{\xi^{e''},e''<\bar{e}\}$ 独立.

于是，$(X^e,e\in E_f)$ 的概率律可以由以下两条件刻划：(i) X^{e_0} 从 ξ_0 出发，在时刻 $y(e_0)$ 终止. (ii) 若 F 是一个包含两个以上元素的饱和集，$e\in F$ 为端点，$e'\in F$，$e'<<e$ 则 $X^e(t)=X^{e'}(t)$，$t\leqslant x(e')$，而且 $(X^e(x(e')+t)-X^e(x(e')),t\geqslant0)$ 和过程簇 $\{X^g,g\in F-\{e\}\}$ 独立，并与 $\{\xi_{x(e)+t}-\xi_{x(e)},t\geqslant0\}$ 同分布.

对于 $u\in\mathscr{L}_f$，定义过程 $(\Gamma_u(t),t\geqslant0)$：

$$\Gamma_u(t)=X^e(t\wedge x(e)),\qquad(5.2.2)$$

其中 $e=\varrho_f(u)$（由引理5.1.2给出）.

命题5.2.2 (i)对于任何的 $u\in\mathscr{L}_f$，Γ_u 是从 z 点出发，于时刻 $f(u)(=x(e))$ 终止的过程，其概率律与 $(\xi_t,0\leqslant t\leqslant f(u))$ 的概率律相同.

(ii)设 $u,u'\in\mathscr{L}_f$，$u<u'$，$u''\in[u,u']$ 是 $\mathscr{L}_f$ 中的唯一点使得 $f(u'')=\inf_{[u,u']}f(s)$，则 $\Gamma_u(t)=\Gamma_{u'}(t)=\Gamma_{u''}(t)$，$t\in[0,f(u'')]$，而且过程 $\{\Gamma_u(f(u'')+t)-\Gamma_u(f(u'')),t\geqslant0\}$ 与过程 $\{\Gamma_{u'}(f(u'')+t)-\Gamma_{u'}(f(u'')),t\geqslant0\}$ 相互独立.

证明 (i)由定义显然，往证(ii). 取 $e=\varrho_f(u)$，$e'=\varrho_f(u')$，我们仅考虑 e 与 e' 不能直接比较的情况，否则易知. 取 $e''=\varrho(u'')$，令 $\bar{e}<<e''$，则 $\bar{e}<e$，$\bar{e}<e'$，由此及命题5.2.1即得. □

定义5.2.3 称 $U\subset\mathscr{L}_f$ 为饱和的，若 $u,u'\in U$，$u<u'$，$u''\in[u,u']$ 使得 $f(u'')=\inf_{[u,u']}f(s)$，则 $u''\in U$.

下面的命题是显然的.

命题5.2.4 过程$(\Gamma_u, u\in \mathscr{L}_f)$由如下性质所刻画.

(i)$\Gamma_0(t)=z, t\geqslant 0$;

(ii)设U是元素个数有限的饱和集,$0\in U$而且U中元素数多于2.若u由$f(u)=\sup_{v\in U}f(v)$给出,$u'u''\in U$定义为

$$u'=\sup([0,u)\cap U), u''=\inf((u,\tau(f)]\cap U),$$

并约定$\inf\varnothing=0$.令

$$\tilde{u}=\begin{cases}u', & 若\ f(u')\geqslant f(u'');\\ u'', & 否则.\end{cases} \tag{5.2.3}$$

则$\Gamma_u(t)=\Gamma_{\tilde{u}}(t), t\leqslant f(\tilde{u})$,而且过程$\{\Gamma_u(f(\tilde{u})+t)-\Gamma_u(f(\tilde{u})), t\geqslant 0\}$与$\{\Gamma_v, v\in U-\{u\}\}$相互独立,并与$(\xi_t, P_0, t\in[0, f(u)-f(\tilde{u}))$同分布.

下面,我们把映射$u\to\Gamma_u$的定义推广到$[0,\tau]$整个区间上.为此,需要进一步假设f满足

(H3)$\mathscr{L}_f$在$[0,\tau)$中稠.

(H4)f具有$\delta>0$阶Hölder连续性,即

$$|f(t)-f(s)|\leqslant \mathrm{const}\,|t-s|^{\delta}, 0\leqslant s,t\leqslant\tau.$$

另外,还假设过程ξ满足

(H5)ξ是轨道连续的Markov过程,而且存在$\alpha>0,\beta>0$,使得$\beta\delta>1$,

$$E|\xi_t-\xi_s|^{\alpha}\leqslant C(T)|t-s|^{\beta}, s,t\in[0,T], \tag{5.2.4}$$

其中$T>0$,$C(T)$为只依赖于T的常数.

命题5.2.5 在假设(H1),(H2),(H3),(H4),(H5)下,过程$(\Gamma_u, u\in\mathscr{L}_f)$可以唯一地延拓到$[0,\tau]$上,延拓后的过程$(\Gamma_u, u\in[0,\tau])$仍然满足命题5.2.2中的性质(i)及(ii).

证明 以$\|\cdot\|$表示连续函数的最大值范数.令$u,u'\in\mathscr{L}_f$,$u<u'$.用命题5.2.2中的记号,我们有

$$E\|\Gamma_u-\Gamma_{u'}\|^{\alpha}\leqslant C_{\alpha}(E\|\Gamma_u-\Gamma_{u''}\|^{\alpha}+E\|\Gamma_{u'}-\Gamma_{u''}\|^{\alpha}). \tag{5.2.5}$$

另一方面,

$$\Gamma_u = \Gamma_{u'} = \Gamma_{u''}, t \leqslant f(u''),$$

而 $\Gamma_u(f(u'')+t)-\Gamma_u(f(u''))$（相应地，$\Gamma_{u'}(f(u'')+t)-\Gamma_{u'}(f(u'')))$）是和 $(\xi_t-\xi_0, t\in[0,f(u)-f(u'')])$（相应地，$(\xi_u-\xi_0, u\in[0,f(u')-f(u'')])$）同分布. 于是，对于 $u,u'\in[0,T]$，由(H4)，(H5)得

$$E\|\Gamma_u - \Gamma_{u''}\|^\alpha \leqslant C(T)|f(u)-f(u'')|^\beta \leqslant C(T,f)|u-u''|^{\delta\beta}. \tag{5.2.6}$$

同理，

$$E\|\Gamma_{u'} - \Gamma_{u''}\|^\alpha \leqslant C(T,f)|u'-u''|^{\delta\beta}. \tag{5.2.7}$$

所以，注意到 $u''\in[u,u']$，

$$E\|\Gamma_u - \Gamma_{u'}\|^\alpha \leqslant C(T,f,\alpha)|u-u'|^{\delta\beta}. \tag{5.2.8}$$

再由 Kolmogorov 引理知，几乎所有$(\Gamma_u, u\in\mathscr{L}_f)$是 Hölder 连续函数. 由于 $\mathscr{L}_f$ 在$[0,\tau]$中稠，所以可把 Γ_u 唯一地延拓地$[0,\tau]$上.

命题的其余结论显然. □

注5.2.6 命题5.2.2构造了映射$[0,\tau(f))\to C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$，$u\to\Gamma_u$. 由于过程 Γ_u 的生存时间 $f(u)$. 在给定 f 下，若把 f 的定义域看成观察的时间，把过程 Γ_u 看作一个整体，则$\{\Gamma_u, u\geqslant0\}$的生存时间 $f(u)$随着时间 u 的变化而变化，Γ_u 的轨迹则表现出伸缩现象，直观上像蠕动的蛇. 因此，若 f 是 Markov 过程的轨道，我们称命题5.2.5所给出的$(\Gamma_u, u\in[0,\tau])$为 **Markov 蛇**. 特别地，若 f 是反射 Brown 运动的轨道，则称之为 **Brown 蛇**.

在下面的讨论中，我们将经常用到命题5.2.2的简单事实：若$(x,(a,b))$是 f 的粗游程，则$\forall\ u\in[a,b], t\in[0,x]$，$\Gamma_u(t)=\Gamma_a(t)=\Gamma_b(t)$. 由 Γ 的以范 Hölder 连续性，我们知道除去零测集以外，上述事实对于 f 的所有的粗游程成立.

从现在开始，我们约定若 $u>\tau$，$\Gamma_u(t)\equiv z, t\geqslant0$，则过程$(\Gamma_u, u\geqslant0)$是以范$\|\cdot\|$连续的. 记 Q_z^f 为空间 $C(\mathbb{R}_+, C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d))$上由 f 所决定的$(\Gamma_u(t), u\geqslant0, \Gamma_u(0)=z)$的概率律. 令 $C^*=\{f\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$；满足(H1)，(H2)，(H3)，(H4)$\}$.

命题5.2.7 映射$(z,f)\in\mathbb{R}^d\times C^*\to Q_z^f$ 是可测的.

证明 对于 $T>0,\delta>0,C>0$，令 $C^*_{T,\delta,C}=\mathrm{cl}\{f\in C^*,\sup_{u\geq 0}f(u)\in[0,T],|f(s)-f(t)|\leqslant C|t-s|^\delta,\forall\ t,s\geqslant 0\}$，其中"cl"表示有限线性组合的一致连续闭包. 我们只需证明映射 $(z,f)\to Q^f_z$ 限制在 $\mathbb{R}^d\times C^*_{T,\delta,C}$ 上是连续的即可.

假设 (z_n,f_n) 是 $\mathbb{R}^d\times C^*_{T,\delta,C}$ 中的收敛序列，其极限点为 (z,f). 在命题5.2.5的证明中，我们得到了 $Q^{f_n}_{z_n}$ 的共同估计，由 Kurtz 胎紧准则(定理1.7.2)，易知概率律 $Q^{f_n}_{z_n}$ 是相对紧的. 因此，只要证明其任一收敛子列必收敛到 Q^f_z 即可. 考虑这样的一个子列，不妨仍记为 $Q^{f_n}_{z_n}$，设其极限为 Q. 往证 $Q=Q^f_z$. 我们应用 Q^f_z 的命题5.2.4所给的特征表现(i)，(ii)设 $U=\{u_1,\cdots,u_p\}$ 是 $\mathscr{L}_f$ 的饱和集，$p\geqslant 2$. 不失一般性，我们假设

$$f(u_1)<f(u_2)<\cdots<f(u_p).$$

可以选取 $\varepsilon>0$，使得 $[u_i-\varepsilon,u_i+\varepsilon]_{i=1,\cdots,p}$ 互不相交而且 f 在每个区间 $[u_i-\varepsilon,u_i+\varepsilon]$ 上在 u_i 点取值最小. 当 n 足够大时，对于任何的 $i\in\{1,2,\cdots,p\}$，f_n 在 $[u_i-\varepsilon,u_i+\varepsilon]$ 上也必定具有唯一(整体)极小点，记之为 $u^n_i\in(u_i-\varepsilon,u_i+\varepsilon)$. 进一步，$\lim_{n\to\infty}u^n_i=u_i$. 这样当 n 足够大时，$f_n(u^n_1)<f_n(n^n_2)<\cdots<f(u^n_p)$，而且，易证 $U_n:=\{u^n_1,\cdots,u^n_p\}$ 是 f_n 的饱和集. 用 f_n 及 U_n 重写命题5.2.4中的性质(ii)，再取极限，可知在 Q 之下，该性质对 f 和 U 也成立. 而性质(i)显然. 于是 $Q=Q^f_z$，证毕. □

现在，固定 $f\in C^*$，$z\in\mathbb{R}^d$，考虑相应的过程 $(\Gamma_u,u\geqslant 0)$. 再固定 $a>0$，f 的水平大于 a 的全体粗游程记为 $\{(a,(\alpha_i,\beta_i)),i\in I\}$，其中指标集 I 至多可数(当 a 充分大时，也可能是空集). 对于 $i\in I$，$u\geqslant 0$，取

$$f_i(u):=f((\alpha_i+u)\wedge\beta_i)-a. \tag{5.2.9}$$

则有 $f_i\in C^*$，$i\in I$. 再取

$$\sigma_a(u):=\inf\left\{s,\int_0^s 1_{[0,a]}(f(v))dv>u\right\} \tag{5.2.10}$$

和

$$f_{(a)}(u):=f(\sigma_{(a)}(u)).$$

则仍有 $f_{(a)}\in C^*$. 直观上讲，$f_{(a)}$是把 f 大于 a 的部分去掉，然后再依次连接而形成的函数. 最后，对于 $i\in I, u\geqslant 0, t\geqslant 0$，令

$$\Gamma_u^i(t) := \Gamma_{(\alpha_i+u)\wedge\beta_i}(a+t), \Gamma_u^{(a)}(t) := \Gamma_{\sigma_{(a)}(u)}(t).$$

命题5.2.8 过程$(\Gamma_u^{(a)}, u\geqslant 0)$是连续的，其概率律为 $Q_z^{f_{(a)}}$. 给定$(\Gamma_{\alpha_i}(a), i\in I)$，过程$(\Gamma_u^i, u\geqslant 0)$，$i\in I$ 是相互独立的，而且与$(\Gamma_u^{(a)}, u\geqslant 0)$独立. 若 $\Gamma_{\alpha_i}(a)=z_i$，则 Γ^i 的概率律是 $Q_{z_i}^{f_i}$，$i\in I$.

证明 由命题5.2.2的性质(i)(ii)及过程的构造即知.

§5.3 测度值过程的构造

按照上一节的讨论，对于固定的 f 及任何的 $y,z\in\mathbb{R}^d$，我们可在某个概率空间上，同时构造两个相互独立的过程(Γ_s^y)，(Γ_s^z)，其分布律分别为 Q_y^f, Q_z^f. 设它们共同的概率为 P^f. 进一步，假设

(H6)

$$E^f\sup_{t\leqslant T}|\Gamma_s^y(t)-\Gamma_s^z(t)|\leqslant C(T,f)|y-z|, \quad (5.3.1)$$

其中 $C(T,f)$为仅依赖于 T 和 f 的常数；

(H7)

$$\sup_{s,s'\geqslant 0}E^f|\Gamma_s^y(t)-y||\Gamma_{s'}^y(t)-y|\leqslant \text{const}\ t. \quad (5.3.2)$$

容易验证，当 ξ_t 是一致椭圆扩散时上述两个条件成立.

考虑空间 $\Theta := C^*\times C(\mathbb{R}_+, C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d))$，其元素记为 $\theta=(f,\omega)$. 对于 $z\in\mathbb{R}^d$，考虑 Θ 上的 σ-有限测度 M_z，定义

$$M_z(df,d\omega)=n(df)Q_z^f(d\omega), \quad (5.3.3)$$

其中 $n(df)$表示直线上 Brown 运动的 Itô 测度，并标准化为

$$n(\sup_{s\geqslant 0}f(s)>\varepsilon)=(2\varepsilon)^{-1}, \varepsilon>0. \quad (5.3.4)$$

(参见文献[166], Prop. 3.6). 首先，M_z 是适定的. 事实上，由 Brown 运动的轨道性质，n 可以看成 C^* 上的测度，而命题5.2.7说明了 $f\to Q_z^f$ 是可测的.

为定义 Θ 上的测度值过程，我们还要引入局部时的概念. 事实上，存在可测映射$\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times C^*\to\mathbb{R}_+$：$(a,t,f)\to l_t^a(f)$，使得

(i)对于$\forall\ f\in C^*$，映射$(a,t)\to l_t^a(f)$是连续的，而且关于t单调递增.

(ii)对于$\forall\ f\in C^*$，$a,t\in\mathbb{R}_+$，$l_t^a(f)=l_{t\wedge\tau(f)}^a(f)$.

(iii)$n(df)$-a.e.对于任意非负可测函数ϕ和$t\geqslant 0$，

$$\int_0^{t\wedge\tau(f)}\phi(f(s))ds=\int_0^{\infty}\phi(a)l_t^a(f)da. \tag{5.3.5}$$

局部时的存在性可参见文献[169]的最后一章，其唯一性则由(i)，(ii)，(iii)得到.由文献[163]，我们知道

$$\sup_{s\geqslant 0}f(s)=\inf\{a>0;l_{\infty}^a(f)=0\}, \tag{5.3.6}$$

$n(df)$-a.s.，而且对于$\forall\ \varepsilon>0$，

$$n(l_{\infty}^{\varepsilon}<x\,|\sup f(s)>\varepsilon)=1-\exp\left\{-\frac{x}{2\varepsilon}\right\}. \tag{5.3.7}$$

以$d_s l_s^a(f)$表示$t\to l_t^a(f)$产生的Lebesgue-Stieltjes测度，显然其支撑集为$\{s:f(s)=a\}$.对于$(f,\omega)\in\Theta$，$a>0$，定义

$$\langle Y_a(f,\omega),\phi\rangle:=\int_0^{\infty}d_s l_s^a(f)\phi(w(s)(a)),\phi\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d). \tag{5.3.8}$$

它是取测度值的随机变量.由命题5.2.5，$\omega(s)$在Q_z^f之下同分布于从z出发于时刻$f(s)$终止的过程ξ，且由(5.3.4)和(5.3.7)易知

引理5.3.1 对$a>0$，

$$n(l_{\infty}^a)=1; \tag{5.3.9}$$

$$n(l_{\infty}^a)^2=4a. \tag{5.3.10}$$

□

由(5.3.9)，

$$\begin{aligned}M_z\langle Y_a(f,\omega),\phi\rangle&=\int n(df)\int_0^{\infty}d_s l_s^a(f)Q_z^f(\phi(\omega(s)(a)))\\&=\int n(df)\int_0^{\infty}d_s l_s^a(f)E_Z\phi(\xi_{f(s)})\\&\quad(\text{由于 }d_s l_s^a(f)\text{ 仅在 }f(s)=a\text{ 上有质量})\\&=S_a\phi(z),a>0,\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

这里S_a表示ξ的半群.

由此可见，M_z在$\{Y_a(f,\omega)\neq 0\}=\{l_{\infty}^a(f)(\omega)>0\}$上的测度有

限，因此下面定理中取条件期望是有意义的. 另一方面，映射$(a,t)\to l_t^a(f)$的连续性推出映射$a\to d_s l_s^a(f)$的连续性，则对于$\forall\ (f,\omega)\in\Theta$，$Y_a(f,\omega)$是关于$a$连续的.

定理5.3.2 若$0<a<b$，

$$M_z\{\exp(-\langle Y_b,\phi\rangle)|Y_u,0\leqslant u\leqslant a\}=\exp(-\langle Y_a,V_{b-a}\phi\rangle),\tag{5.3.12}$$

其中对于$u>0$，$y\in\mathbb{R}^d$，

$$V_u\phi(y)=M_y(1-\exp(-\langle Y_u,\phi\rangle)).\tag{5.3.13}$$

在证明定理之前，我们需要引入一些记号. 首先引入Y_a产生的σ-域簇. 对于$\forall\ f\in C^*$，$a>0$，$\sigma_{(a)}^f(t)$如(5.2.10)所定义. 记$\mathscr{E}_a$（相应地，$\mathscr{E}_a^0$）为Θ上由映射$(f,\omega)\to(f\circ\sigma_{(a)}^f,\omega\circ\sigma_{(a)}^f)$（相应地，$(f,\omega)\to f\circ\sigma_{(a)}^f$）产生的并关于$\{M_z,z\in\mathbb{R}^d\}$完备的$\sigma$-域.

下面将说明，$\forall\ a\geqslant0$，Y_a是$\mathscr{E}_a$可测的. 事实上，对于$f\in C^*$，令$\lambda_f^a(ds)$是$\mathbb{R}_+$上的测度：

$$\lambda_f^a([0,t])=l_{\sigma_{(a)}^f(t)}^a(f).$$

映射$(f,\omega)\to\lambda_f^a$是$\mathscr{E}_a^0$可测的，因为，$\forall\ t>0$，$n(df)$-a.e.

$$\lambda_f^a([0,t])=\lim_{0<\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{[a-\varepsilon,a]}(f\circ\sigma_{(a)}^f(s))ds.\tag{5.3.14}$$

进一步，$M_z(df,d\omega)$-a.e.

$$\begin{aligned}\langle Y_a(f,\omega),\phi\rangle&=\int_0^\infty d_s l_s^a(f)\phi(\omega(s)(a))\\&=\int_0^\infty\lambda_f^a(ds)\phi(\omega\circ\sigma_{(a)}^f(s)(a)).\end{aligned}\tag{5.3.15}$$

所以，Y_a是$\mathscr{E}_a$可测的. 同样可证. $l_\infty^a(f)=\lambda_f^a(\mathbb{R}_+)$是$\mathscr{E}_a^0$-可测的.

引理5.3.3 设$a>0$，对于$\forall\ f\in C^*$，$(a,(\alpha_i,\beta_i))$，$i\in I_f$为水平大于a的粗游程的全体. 设f_i，$i\in I_f$如(5.2.9)所定义. 定义$C^*\times\mathbb{R}_+$上原子测度$N^f(dg,dl)$：

$$N^f(dg,dl)=\sum_{i\in I_f}\delta_{(f_i,l_{\alpha_i}^a(f))}(dgdl).\tag{5.3.16}$$

则相对于M_z，在给定$l_\infty^a(f)$条件下，N^f与$\mathscr{E}_a$独立. 其条件分布律是以$1_{l\leqslant l_\infty^a(f)}n(dg)dl$为强度的Poisson测度.

证明 若$\mathscr{E}_a^0$代替$\mathscr{E}_a$，该引理即是线性 Brown 运动的标准结果. 在这一标准结果的证明过程中主要应用大于或小于一个固定水平游程之间的独立性. 为了说明该证明也适合该引理的证明，只须证在$\mathscr{E}_a^0$条件下，N^f与$\mathscr{E}_a$是相互独立的. 而命题5.2.8的第一个结论告诉我们在$\mathscr{E}_a^0$下，$\omega\circ\sigma_{(a)}^f$关于$M_x$的分布是$Q_x^{f\cdot\sigma_{(a)}^f}$，它仅仅依赖于$f\circ\sigma_{(a)}^f$. 这说明了在$\mathscr{E}_a^0$条件下$\mathscr{E}_\infty^0$与$\mathscr{E}_a$是相互独立的. 因此，该证明对这里情况也适用. 但由于详细证明较长，故在此略去. 详见文献[169]. □

定理5.3.2的证明 借用上面的记号，我们要证明：

$$M_x\{\exp(-\langle Y_b,\phi\rangle)\mid\mathscr{E}_a\}=\exp(-\langle Y_x,V_{b-a}\phi\rangle). \tag{5.3.17}$$

为此，我们分两步来进行.

第一步：考虑$M_x\{\exp(-\langle Y_b,\phi\rangle)\mid\mathscr{E}_\infty^0\vee\mathscr{E}_a\}$. 对于$f\in C^*$，我们知道，$f$的水平大于$a$而且到达$b$的游程只有有限个，记其数为$n:=n(f)$. 设$(\alpha_j,\beta_j)$，$j\in\{1,\cdots,n\}$为相应游程的区间，并取

$$f_j(t)=f((\alpha_j+t)\wedge\beta_j)-a,$$
$$\omega_j(t)(u)=\omega((\alpha_j+t)\wedge\beta_j)(a-u).$$

则

$$\begin{aligned}
&M_x(\exp\{-\langle Y_b,\phi\rangle\}\mid\mathscr{E}_\infty^0\vee\mathscr{E}_a) \qquad (5.3.18)\\
&=Q_x^f(\exp\{-\langle Y_b,\phi\rangle\}\mid w\circ\sigma_{(a)}^f)\\
&=Q_x^f\left(\exp\left\{-\sum_{j=1}^n\int_{\alpha_j}^{\beta_j}d_sl_s^b(f)\phi(w(s)(b))\right\}\mid w\circ\sigma_{(a)}^f\right)\\
&=Q_x^f\left(\exp\left\{-\sum_{j=1}^n\int_0^\infty d_sl_s^{b-a}(f_j)\phi(\omega_j(s)(b-a))\right\}\mid w\circ\sigma_{(a)}^f\right),
\end{aligned}$$

其中第一个等式可通过两端同乘以$F(f)G(\omega\circ\sigma_{(a)}^f)$的形式函数及单调类定理得到. 其它等式由定义可知.

应用命题5.2.8，相对于Q_x^f，在给定$\{\omega(\alpha_j)(a),j=1,2,\cdots,n\}$条件下，过程$\{\omega_j\}_{j=1,2,\cdots,n}$是相互独立的，而且与$\omega\circ\sigma_{(a)}^f$独立. 进一步，$\omega_j$的条件概率律为$Q_{\omega(\alpha_j)(a)}^{f_j}$. 由于变量$\omega(\alpha_j)(a)$是$\omega\circ\sigma_{(a)}^f$的可测泛函($f$固定)，我们有

$$M_x(\exp\{-\langle Y_b,\phi\rangle\}|\mathscr{E}^0_\infty \vee \mathscr{E}_a) = \prod_{j=1}^n H(f_j,\omega(\alpha_j)(a)),$$

(5.3.19)

其中

$$H(f,y)= Q^f_y\exp\left\{-\int_0^\infty d_s l_s^{b-a}(f)\phi(\omega(s)(b-a))\right\}$$
$$= Q^f_y\exp\{-\langle Y_{b-a}(f),\phi\rangle\}. \quad (5.3.20)$$

第二步：以 $\mathscr{E}_a$ 作条件. 令

$$\tau^f_a := \inf\{t; l^a_t(f) > u\},$$

并对此定义约定 $\inf\varnothing=\tau(f)$. 过程 $\omega\circ\tau^f_a$ 是右连续且关于 $\mathscr{E}_a$ 可测. 事实上，由于

$$\omega\circ\tau^f_a = \omega\circ\sigma^f_{(a)}\circ\gamma^f_{(a)},$$

其中 $\gamma^f_{(a)}(u)=\inf\{t;\lambda^f_a([0,t])>a\}$ 是 $\mathscr{E}^0_a$-可测的. 而对每一个 $j\in\{1,\cdots,n\}$, $\omega(\alpha_j)=\omega\circ\tau^f_a(l^a_{\alpha_j}(f))=\omega\circ\tau^f_a(l^a_{\beta_j}(f))$ 则

$$M_x(\exp\{-\langle Y_b,\phi\rangle\}|\mathscr{E}_a)$$
$$= M_x\left(\prod_{j=1}^n H(f_j,\omega(\alpha_j)(a))|\mathscr{E}_a\right) \quad (由(5.3.19))$$
$$= M_x\left(\exp\int N^f(dgdl)\log(H(g,\omega\circ\tau^f_a(l)))|\mathscr{E}_a\right)$$
$$= \exp\left(-\int_0^\infty dl\int n(dg)(1-H(g,\omega\circ\tau^f_a(l)))\right)$$

(由引理 5.3.3)

$$= \exp\left(-\int_0^\infty d_s l^a_s(f)\int n(dg)(1-H(g,\omega(s)))\right)$$
$$= \exp\left(-\langle Y_a(f,\omega),\int n(dg)(1-H(g,\cdot))\rangle\right).$$

(5.3.21)

由 H 的定义，$\forall\ y\in\mathbb{R}^d$,

$$\int n(dg)(1-H(g,y))$$
$$= \int n(dg)Q^g_y(1-\exp\{-\langle Y_{b-a}(g,\cdot),\phi\rangle\})$$

$$= M_y(1 - \exp\{-\langle Y_{b-a},\phi\rangle\}).$$

这就完成了定理的证明. □

以 $C_b(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^d$ 有界连续函数的全体，并赋予一致收敛拓扑.

命题5.3.4 取 $V_0\phi=\phi$，则 $\{V_t\}_{t\geq 0}$ 是 $C_b(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ 上的压缩半群. 而且对于 $\phi\in C_b(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$，映射 $(t,y)\to V_t\phi(y)$ 满足

$$V_t\phi = S_t\phi - 2\int_0^t S_{t-s}(V_s\phi)^2 ds. \tag{5.3.22}$$

证明 由定义易知，若 $\phi\in C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}_+)$，则 $V_t\phi\in C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}_+)$，而且

$$\begin{aligned}V_t\phi(y) &= M_y(1-\exp\{-\langle Y_t,\phi\rangle\}) \\ &\leqslant M_y\langle Y_t,\phi\rangle = S_t\phi(y).\end{aligned} \tag{5.3.23}$$

这就说明了 V_t 在 $C_b(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ 上是压缩的. 为证半群性，我们任意固定 $u,v>0,a>0$，考虑 $M_y(\exp\{-\langle Y_{a+u+v},\phi\rangle\}|\mathscr{G}_a)$. 由定理5.3.2，对于 $y\in\mathbb{R}^d$，我们有

$$\begin{aligned}&\exp\{-\langle Y_a,V_v(V_u\phi)\rangle\} \\ &= M_z(\exp\{-\langle Y_{a+v},V_u\phi\rangle\}|Y_s,0\leqslant s\leqslant a) \\ &= M_z(M_y(\exp\{-\langle Y_{a+u+v},\phi\rangle\}|Y_r, \\ &\qquad 0\leqslant r\leqslant a+v)|Y_s,0\leqslant s\leqslant a) \\ &= M_y(\exp\{-\langle Y_{a+u+v},\phi\rangle\}|Y_s,0\leqslant s\leqslant a) \\ &= \exp\{-\langle Y_a,V_{u+v}\phi\rangle\}.\end{aligned}$$

于是

$$\langle Y_a,V_v(V_u\phi)\rangle = \langle Y_a,V_{u+v}\phi\rangle, M_y\text{-a.s.}$$

从而

$$M_y\langle Y_a,V_v(V_u\phi)\rangle = M_y\langle Y_a,V_{u+v}\phi\rangle.$$

而令 $a\to 0$ 并注意到 ϕ 的连续性，即得 $V_v(V_u\phi)=V_{u+v}\phi$.

往证 $V_t\phi$ 满足积分方程(5.3.22). 为此，先假设 ϕ 满足

$$|\phi(x)-\phi(y)|\leqslant C_0|x-y|, x,y\in\mathbb{R}^d.$$

固定 $T>0$. 对于 $0\leqslant t\leqslant T$，

$$|V_t\phi(y)-V_t\phi(z)|$$

$$= \left| \int n(df) E^f \exp\left\{ - \int_0^\infty d_s l_s^t(f) \phi(\Gamma_s^y(t)) \right\} - \exp\left\{ - \int_0^\infty d_s l_s^t(f) \phi(\Gamma_s^z(t)) \right\} \right|$$

$$\leqslant \int n(df) \int_0^\infty d_s l_s^t(f) E^f |\phi(\Gamma_s^y(t)) - \phi(\Gamma_s^z(t))|$$

$$\leqslant C_0 K_T |y - z| \qquad \text{(由假设(H6))}. \qquad (5.3.24)$$

下面来看 $V_t\phi$ 在 $t \to 0$时的行为. 由 Taylor 展开,

$$V_t\phi(y) = M_y\langle Y_t, \phi\rangle - \frac{1}{2} M_y \langle Y_t, \phi\rangle^2 + R_t^y \phi, \quad (5.3.25)$$

其中$0 \leqslant R_t^y\phi \leqslant M_y\langle Y_t, \phi\rangle^3$.

首先由(5.3.4)及(5.3.7)可知,$M_y\langle Y_t, \phi\rangle = P_t\phi(y)$,其次,

$$M_y\langle Y_t, \phi\rangle^2 = M_y\langle Y_t, \phi(y)\rangle^2 + M_y\langle Y_t, \phi - \phi(y)\rangle\langle Y_t, \phi + \phi(y)\rangle$$

$$:= I_1 + I_2. \qquad (5.3.26)$$

由引理5.3.1,

$$I_1 = \phi(y)^2 M_y \langle Y_t, 1\rangle^2 = \phi(y)^2 M_y (l_\infty^t)^2 = 4t\phi(y)^2. \quad (5.3.27)$$

而由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$I_2 \leqslant (16t \|\phi\|_\infty^2)^{1/2} (M_y \langle Y_t, \phi - \phi(y)\rangle^2)^{1/2},$$

而

$$M_y\langle Y_t, \phi - \phi(y)\rangle^2$$

$$\leqslant C_0^2 \int n(df) \int_0^\infty d_s l_s^t(f) \int_0^\infty ds'$$

$$\times l_{s'}^t(f) Q_y^f (|\omega(s)(t) - y| |\omega(s')(t) - y|)$$

$$\leqslant \text{const } tn((l_\infty^t)^2)$$

$$= 4\text{const } t^2 \qquad \text{(由(H7)及引理 5.3.1)}. \qquad (5.3.28)$$

因此,

$$M_y\langle Y_t, \phi\rangle^2 = 4t\phi(y)^2 + O(t^{3/2}). \qquad (5.3.29)$$

同理可证,

$$R_t^y\phi \leqslant M_y\langle Y_t, \phi\rangle^3 \leqslant \|\phi\|_\infty^3 M_y \langle Y_t, 1\rangle^3 = 24\|\phi\|_\infty^3 t^2. \quad (5.3.30)$$

这样,我们有

$$V_t\phi(y) = S_t\phi(y) - 2t\phi(y)^2 + O(t^{3/2}). \qquad (5.3.31)$$

由(5.3.23)和(5.3.24)知,$V_t\phi, 0\leqslant t\leqslant T$ 是一致有界的,而且满足一致 Lipschitz 条件. 因此,对于固定的 $t\in(0,T]$及任意的 $n\geqslant 1$,

$$\begin{aligned} V_t\phi(y) &= V_{t/n}(\cdots(V_{t/n}\phi))(y) \\ &= S_{t/n}(V_{(n-1)t/n}\phi)(y) \\ &\quad - 2\frac{t}{n}(V_{(n-1)t/n}\phi)^2(y) + O((T/n)^{3/2}) \\ &= S_t\phi(y) - 2\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n}S_{(n-i)/n}(V_{(i-1)t/n}\phi)^2(y) \\ &\quad + O((T/n)^{3/2}). \end{aligned}$$

上式最后的等式由归纳法得到. 显然映射$(s,u)\to S_s(V_u\phi)^2(y)$是有界连续的. 所以取 $n\to\infty$,我们就得到(5.3.22). 对于一般的有界连续函数 ϕ,可由适当的 Lipschitz 函数逼近. 于是不难验证所需结论. □

定理5.3.2和命题5.3.4说明了$(Y_a, a\geqslant 0, M_y)$是底过程为 ξ,分枝特征为$2\lambda^2$,初始测度为单点测度 δ_y 的超过程. 那么对于一般初始测度 μ 的超过程,我们也有

定理5.3.5 设 $\mu\in M_F(\mathbb{R}^d)$,$\mathcal{N}(dz\,df\,d\omega)$是$\mathbb{R}^d\times\Theta$ 上的 Poisson 测度,其强度为 $\mu(dz)M_z(df\,d\omega)$. 令

$$\langle Z_t,\phi\rangle = \begin{cases} \mu, & t=0 \\ \int\mathcal{N}(dz\,df\,d\omega)\langle Y_t(f,\omega),\phi\rangle, & t>0, \end{cases} \qquad (5.3.32)$$

$\phi\in pb\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$. 则 $Z=(Z_t,t\geqslant 0)$是底过程为 ξ,分枝特征为$2\lambda^2$,初始测度为 μ 的超过程.

证明 设$0<a_1<\cdots<a_n=a<b, \phi_1,\cdots,\phi_n,\psi\in C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}_+)$,我们计算

$$\begin{aligned} &E\exp\{-\langle Z_b,\phi\rangle\} \\ &= \exp\left\{-\int\mu(dz)\int M_z(df\,d\omega)(1-\exp\{-\langle Y_b(f,\omega),\phi\rangle\})\right\} \\ &= \exp\left\{-\int\mu(dz)V_b\phi(z)\right\}. \end{aligned}$$

证毕. □

至此,我们完成了二分枝超过程的构造. 下面,我们来看本章引言部分的结论是如何由定理5.3.5得到的. 这是因为当初始测度是单点测度的时候,反射 Brown 运动的概率律可以直接给出定理5.3.5所要的游程的 Poisson 分布. 具体细节,可参见文献[116, 117].

超过程的这种构造,在解决很多问题时是十分有效的. 以往对超 Brown 运动的研究,主要的方法是用非标准分析来代替粒子系统逼近的"极限过程". 然而基于这种轨道构造来研究超 Brown 运动,则可以更直接、有效(见 Le Gall 从1993到1996发表的系列文章). 实际上,我们可以用这种构造给出以往有关超过程及其占位时过程支撑集的 Hausdorff 测度与 Hausdorff 维数.

为了便于应用,再来考察超 Brown 运动的轨道构造. 接本章引言中的讨论,我们有

命题5.3.6 对$\forall\ 0<r<s<t$. 若 $\tilde{w}(r)=\tilde{w}(s)=\tilde{w}(t)=c>0$,则

(i)若 $K(s,t)=c$,则 $W(s)=W(t)$,$Q^{\tilde{w}}$-a.s.

(ii)若 $K(s,t)=0$,则 $W(s)$与 $W(t)$相互独立.

(iii)若 $k_1=K(r,s)<c$,$k_2=K(s,t)<c$,则正态分布三元组$(W(r),W(s),W(t))$的联合密度函数为

$$p(x_r,x_s,x_t)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{3d}I^d}}\exp\left(-\frac{1}{2I}\,II\right). \qquad (5.3.33)$$

其中 $I=c^3+2k_1k_2(k_1\wedge k_2)-c(k_1\wedge k_2)^2-ck_1^2-ck_2^2$,$II=(c^2-k_2^2)(x_r-z)^2+(c^2-(k_1\wedge k_2)^2)(x_s-z)^2+(c^2-k_1^2)(x_t-z)^2-2(ck_1-k_2(k_1\wedge k_2))(x_r-z)\cdot(x_s-z)+2(k_1k_2-c(k_1\wedge k_2))(x_r-z)\cdot(x_t-z)-2(ck_2-k_1(k_1\wedge k_2))(x_s-z)\cdot(t_t-z)$. 这里 $k_1\wedge k_2:=\min\{k_1,k_2\}$.

证明 (i),因为 $K(s,t)=c$,又由于 $EW(s)=EW(t)$,因而由(5.0.2)式得 $E(W_s-W_t)^2=0$. 由此知结论成立. (ii)和(iii)由直接计算可得. □

对固定的 $\tilde{w}$,设

$$L_t^{\tilde{w}} := \{s : \tilde{w}(s) = t, s \leqslant \eta(\tilde{w})\},$$

$$\hat{L}_t^{\tilde{w}} := \{s : s \in L_t^{\tilde{w}}, \text{且 } s \text{ 不是 } \tilde{w} \text{ 的局部极大值点}\}.$$

则在 $\mathscr{R}(d\tilde{w})$ 之下，$L_t^{\tilde{w}}$ 至多有可列个点. 对 $\forall\ s_1, s_2 \in \hat{L}_t^{\tilde{w}}$，定义如下等价关系：$s_1 \sim s_2$，若 $K(s_1, s_2) = \tilde{w}(s_1) = \tilde{w}(s_2)$. 令 $\tilde{L}_t^{\tilde{w}} := \hat{L}_t^{\tilde{w}}/\sim$. 由前面的构造和命题5.3.6可证

命题5.3.7 对 $\forall\ t > 0$，a.s.-P，

$$S(X_t(\tilde{w}, w)) = \{w(s), s \in \hat{L}_t^{\tilde{w}}\} = \{w(s), s \in \tilde{L}_t^{\tilde{w}}\}. \tag{5.3.34}$$

文献评注：本章的主要内容取自于[117]，这里我们把扩散过程换为更一般的满足条件(H6)(H7)的 Markov 过程. 在我们的证明过程中，增加了一些直观说明. 可以看到，这种 Brown 蛇构造方法，一方面用到了反射 Brown 运动轨道的二分枝性；另一方面用到了底过程的轨道连续性以及协方差的一个估计，如(H7). 显然，这种构造有很大的局限性. Le Gall，Le Jan 等人近期的工作在这方面是一个突破. 其研究结果表明，Lévy 过程可以实现分枝特征的一般化(参见文献[122])，但构造一般分枝特征超过程，仍有一段路要走. S. Watanabe 在[210]中说明二分枝率函数为正的情况下，Le Gall 的构造仍将适用，其主要思想是用时间变换把它仍归结为常分枝率的情况.

最后两个命题是初等的，但很有用. 摘录于唐加山的博士论文[187].

第六章　超 Brown 运动

本章重点讨论超 Brown 运动. 一般来讲,若底过程是 Brown 运动,那么取值于 d 维欧氏空间上的测度值分枝过程均称为超 Brown 运动. 然而,分枝特征的一般化会使问题变得复杂. 因此,为了简单起见,我们把超 Brown 运动限定为取值于$\mathbb{R}^d$ 上有限测度全体 $M_F(\mathbb{R}^d)$(或缓增测度空间 $M_p(\mathbb{R}^d)$, $p>d$),底过程为 d-维标准 Brown 运动,分枝特征为 $\Psi(x,\lambda)=\lambda^{1+\beta}$的超过程. 在这条件下,由§3.4中的讨论知,超 Brown 运动是强 Markov 过程.

超 Brown 运动是超过程研究的一个"样板". 对它的研究可以为一般超过程的研究提供一些基本的思想和方法. 我们先来考察测度值分枝过程那些问题是值得研究的.

首先,由于测度空间是一类特殊的距离空间,我们可以把测度值过程纳入一般过程论的框架内来探讨. 有关随机过程方面的问题同样对超过程也是有意义的. 例如,过程轨道性质、正则性等经典问题已经被系统地研究过,特别是在 Markov 性、转移概率、进入率(entrance law)、位势理论(过分函数、不变函数、与微分方程的联系等)、鞅问题、极限定理与渐近性质等方面取得了很大进展,已经形成相当完善的理论. 但是在随机过程的一般理论框架内,人们自然地把随机过程想象成空间运动的"点". 而测度值过程更有意义的问题在于"点"所蕴含的内容. 因此,在考虑测度值过程应该把它看做一团"云". 基于这种理解,测度值过程就有很多颇具特色的问题. 例如,相对于底空间参考测度的绝对连续性与奇异性、局部结构、Palm-分布等.

超 Brown 运动已经有过比较详尽的研究,有关文献很多,其中 D. A. Dawson, I. Iscoe, E. A. Perkins 等人的系列工作,为超过程乃至整个测度值分枝过程的研究打下了坚实的基础,并提供了许

多有效的方法和经验.需要指出的是超 Brown 运动的许多结果是用非标准分析的方法得到的，而非标准分析对于很多人来说是一门比较陌生的学科. Le Gall 的 Brown 蛇构造给我们提供了一种新途径.实践证明在同类问题的研究中，利用 Le Gall 的构造方法去解决问题更有效、更直接.可以相信用该方法完全可以重新证明已有的结论，是很有意义的工作.因篇幅所限，本书不重点论述超过程局部结构方面的结果.有兴趣的读者可参见文献[29]及 Le Gall 等人最新的系列文章(见书后的参考文献).

下面基于大家熟知的分析理论来研究超 Brown 运动几个方面的性质.

§6.1 超 Brown 运动的半群及其相关估计

考虑非线性发展方程:

$$\begin{cases} \dot{u}(t,x) = \frac{1}{2}\triangle u(t,x) - u^{1+\beta}(t,x), (t,x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^d; \\ u(0,x) = f(x), \end{cases} \tag{6.1.1}$$

其中 $\dot{u}=\partial u/\partial t$, $f\in C(\mathbb{R}^d)$.若该方程在古典意义下有解，则称此解为强解.相应地，称非线性积分方程

$$V_t f(x) + \int_0^t S_s[V_{t-s}f]^{1+\beta}(x)ds = S_t f(x) \tag{6.1.2}$$

的解为方程(6.1.1)之 mild-解，其中 S_t 是 Brown 运动的算子半群.强解与 mild-解之间有如下关系

定理6.1.1 如果 $f\in pbC(\mathbb{R}^d)$，则方程(6.1.1)具有唯一的 mild 解 $V_t f$.如果 $f\in pbC^2(\mathbb{R}^d)$，那么 $V_t f$ 是强解.反之任一强解也是 mild 解，因此强解也是存在唯一的.

证明 Mild 解的存在唯一性在§3.2中已经证明.当 $f\in pbC^2(\mathbb{R}^d)$时，由方程(6.1.2)及 Brown 运动的转移密度的光滑性，易知，$V_t f\in C^1([0,\infty))\cap C^2(\mathbb{R}^d)$, $t>0$.从而它也是强解.

反过来，若 u_t 满足方程(6.1.1)，则

$$w_t := S_t f - \int_0^t S_{t-s} u^{1+\beta}(s) ds$$

满足

$$\dot{w}_t = \frac{1}{2}\triangle w_t - u^{1+\beta}(t).$$

因而，$\dot{u}_t - \dot{w}_t = \frac{1}{2}\triangle[u_t - w_t]$，且 $u_0 - w_0 = 0$. 所以由热方程解的唯一性 $u_t - w_t \equiv 0$(参见文献[36])，从而 u_t 满足方程(6.1.2). □

我们知道，方程(6.1.2)定义了 $C_0(\mathbb{R}^d)$ 上一个非线性半群 $V_t f$. 它与半群 S_t 有如下的关系.

引理6.1.2 设 $f \in pC_0(\mathbb{R}^d)$，则下面的不等式对于所有的 $t \geqslant 0$ 成立：

(i) $V_t f \geqslant 0$;

(ii) $0 \leqslant S_t f - V_t f \leqslant t S_t f^{1+\beta}$;

(iii) $V_t f \geqslant e^{-t\|f\|^\beta} S_t f$;

(iv) $\|\nabla V_t f\| \leqslant C\|f\| t^{-1/2} + C\|f\|^{1+\beta} t^{1/2}$.

证明 (i)先假设 $f \in pC_0^2(\mathbb{R}^d)$. 考察

$$\begin{cases} \dot{U}(t,x) = \frac{1}{2}\triangle U(t,x) - g(U(t,x)), (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^d; \\ U(0,x) = f(x), \end{cases} \tag{6.1.3}$$

其中 $g(u) = |u|^{1+\beta}$. 同定理3.2.6之证明，可知其解存在唯一，且 U_t 是强解，$U_t f \leqslant S_t f \to 0 (x \to \infty)$.

为证 U_t 非负，采用反证法. 假若结论不真，注意到 $U_t \in C_0(\mathbb{R}^d)$，我们可选取充分大的 T，使得存在 $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ 使得 $U_{t_0}(x_0) = \min\{U_t(x) : t(x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^d\} < 0$，而且 (t_0, x_0) 是 U_t 极小负点. 于是 $\dot{U}_{t_0}(x_0) = 0$，$\triangle U_{t_0}(x_0) \geqslant 0$，但

$$0 < g(U_{t_0}(x_0)) = \dot{U}_{t_0}(x_0) - 1/2\triangle U_{t_0}(x_0) \leqslant 0,$$

矛盾！所以 U_t 非负. 当 U_t 非负时，方程(6.1.3)即化为(6.1.1). 再由方程解的唯一性可知结论(i)对于 $f \in pC_0^2(\mathbb{R}^d)$ 成立. 由于

$C_0^2(\mathbb{R}^d)$在 $C_0(\mathbb{R}^d)$中稠，再由有界收敛定理则知(i)对于一切 $f\in pC_0(\mathbb{R}^d)_+$成立.

(ii)

$$
\begin{aligned}
0\leqslant S_tf-V_tf &\leqslant \int_0^t S_{t-s}[S_sf]^{1+\beta}ds \\
&\leqslant \int_0^t S_{t-s}S_sf^{1-\beta}ds\text{(由 Jensen 不等式)} \\
&= tS_tf^{1+\beta}.
\end{aligned}
$$

(iii)首先注意到，$0\leqslant V_tf\leqslant S_tf\leqslant\|f\|:=c^{1/\beta}$，取 $W_t:=e^{-ct}S_t$ 及 $w(t)=W_tf$，往证 $v(t):=V_tf-w(t)\geqslant 0$. 事实上，对于 $f\in pC^2(\mathbb{R}^d)$，w 满足

$$
\begin{cases}
\dot{w}(t)=1/2\triangle w(t)-cw(t), \\
w(0)=f
\end{cases}
$$

以及 v 满足

$$
\begin{cases}
\dot{v}(t)=1/2\triangle v(t)-cv(t)+[c-(V_tf)^\beta]V_tf,, \\
v(0)=0.
\end{cases}
$$

从而可知

$$
v(t)=\int_0^t W_{t-s}([c-(V_sf)^\beta]V_sf)ds.
$$

因为 $V_tf\leqslant c^{1/\beta}$，所以 $v(t)\geqslant 0$.

(iv)由(6.1.2)及 S_tf 的估计易知$\|V_tf(\cdot)\|\leqslant\|f\|$，而且

$$
\begin{aligned}
|\partial_{x_i}V_tf(x)| &\leqslant |\partial_{x_i}S_tf(x)| \\
&\quad+\int_0^t\int|\partial_{x_i}p(t-s,x,y)(V_sf(y))^{1-\beta}|dyds \\
&\leqslant \|f\|\int|\partial_{x_i}p(t,x,y)|dy \\
&\quad+\sup_{s\in[0,t]}\|V_sf(\cdot)\|^{1+\beta}\int_0^t\int|\partial_{x_i}p(t-s,x,y)|dyds.
\end{aligned}
\tag{6.1.4}
$$

注意到 $\sup_{s\in[0,t]}\|V_sf(\cdot)\|^{1+\beta}\leqslant\|f\|^{1+\beta}$和

$$|\partial_{x_i} p(t,x,y)| \leqslant (2\pi t)^{-d/2}(|x-y|/t)\exp(-|x-y|^2 2t)$$
$$\leqslant Ct^{-(1+d)/2}\exp(-|x-y|^2/3t), \qquad (6.1.5)$$

即得(iv). □

注6.1.3 Iscoe(1986)在文献[93]的附录中曾试图用纯分析的方法证明非线性半群 V_t 的非负性，但其证明过程中有些步骤跳跃太大. 这里我们用相同的思想，通过引入函数 g，给出了该结论的一个简单证明.

§6.2 超 Brown 运动的占位时过程

在§4.4，我们引入了一般取有限测度值超过程的占位时过程. 现在，把这个概念推广到取缓增测度值的情形.

6.2.1 缓增测度值空间上超 Brown 运动的构造

在§3.4，我们利用粒子系统逼近的方法直接构造了缓增测度空间上的超过程. 实际上，也可以利用超过程之分枝性，在取有限测度值过程的基础上来构造取缓增测度值的超过程. 这样做的好处在于不仅保持 Laplace 泛函不变，而且根据这种构造方法，也使得我们能够借助有限测度值情况下的结果去认识和理解取无穷测度值时的情形①.

设

$$U_k := \{x \in \mathbb{R}^d; k \leqslant |x| < k+1\}, k = 0,1,2,\cdots,$$

则 $\{U_k\}_{k\geqslant 0}$ 相互不交，而且 $\mathbb{R}^d = \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$. 于是对于任一测度 $\mu \in M_p(\mathbb{R}^d)$ 及 $k \geqslant 0$，设 μ_k 是 μ 在 U_k 上的限制. 显然 μ_k 是 $\mathbb{R}^d$ 上的有限测度. 根据已有理论，我们可以在同一的连续轨道空间 $C(\mathbb{R}_+, M_F(\mathbb{R}^d))$ 上构造出以 μ_k 为初始测度的超 Brown 运动，记为 $\{X_t^k, P^{\mu_k}\}$. 这样就得到一列相互独立的超 Brown 运动 $\{X_t^k, P^{\mu_k}\}_{k\geqslant 0}$. 定义

① 本小节的讨论是仅对超 Brown 运动进行的，但方法完全适用于一般超过程.

$$X_t := \sum_{k=0}^{\infty} X_t^k. \qquad (6.2.1)$$

我们有

命题6.2.1 (6.2.1)的右端级数在测度空间$(M_p(\mathbb{R}^d), \tau_p)$中是收敛的，其和属于$M_p(\mathbb{R}^d)$.

证明 借用§1.2.6中的记号，仅需证明对于任一非负$f \in K_p(\mathbb{R}^d)$，正项级数$\sum_{k=0}^{\infty} \langle X_t^k, f \rangle < \infty$, a.s. 事实上，

$$\begin{aligned} P^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \langle X_t^k, f \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} P^{\mu_k} \langle X_t^k, f \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle \mu_k, f \rangle = \langle \mu, f \rangle < \infty. \end{aligned} \qquad (6.2.2)$$

证毕.

进一步，易知

命题 6.2.2 $\{X_t, P^{\mu}\}_{\mu \in M_p(\mathbb{R}^d)}$的 Laplace 泛函为

$$P^{\mu}[\exp(-\langle X_t, \psi \rangle)] = \exp(-\langle \mu, V_t \psi \rangle), \psi \in K_p(\mathbb{R}^d), \mu \in M_p(\mathbb{R}^d). \qquad (6.2.3)$$

这里V_t为$K_p(\mathbb{R}^d)$上的半群. 由如下方程决定：

$$\dot{u}(t) = \frac{1}{2} \triangle u(t) - u^{1+\beta}(t), u(0) = \psi. \qquad (6.2.4)$$

因此，X_t是以μ为初始测度的超 Brown 运动.

注6.2.3 由方程(6.2.4)给出的$K_p(\mathbb{R}^d)$上的半群. 它限制在$bC(\mathbb{R}^d)$上是取有限测度值的超 Brown 运动半群.

前面我们在函数空间$C_0(\mathbb{R}^d)$上，已经简单讨论了非线性半群V_t与S_t之间的关系. 若在函数空间$K_p(\mathbb{R}^d)$上考虑上述问题，我们有

命题6.2.4 设$d < p$，$\psi \in pK_p(\mathbb{R}^d)$，如果

$$\lim_{|x| \to +\infty} |x|^p \psi(x) = l \in \mathbb{R}_+,$$

则

$$\lim_{|x| \to +\infty} |x|^p S_t \psi(x) = \lim_{|x| \to +\infty} |x|^p V_t \psi(x) = l.$$

证明 由 Fatou 引理，$\liminf_{|x| \to +\infty} |x|^p S_t \psi(x) \geq l$. 为得到反向

不等式，对任一固定$0<\eta<1/2$，把$\mathbb{R}^d$分解成$\mathbb{R}^d=B_1\cup B_2$，其中$B_1:=\{y\in\mathbb{R}^d;\ |x-y|\leqslant\eta|x|\}$，$B_2=B_1^c$. 当$y\in B_1$，有$|y|\geqslant(1-\eta)|x|$. 给定$\varepsilon>0$，选择$K$使得对于$|y|\geqslant K/2$，$|y|^p\psi(y)\leqslant l+\varepsilon$. 那么当$|x|>K$时，$|x|^pS_t\psi(x)=I_1+I_2$，其中

$$I_1=\int_{B_1}p_t(x-y)(|x|/|y|)^p(|y|^p\psi(y))dy\leqslant(1-\eta)^{-p}(l+\varepsilon),$$

$$I_2=|x|^p\int_{B_2}p_t(x-y)\psi(y)dy$$
$$\leqslant|x|^p(4\pi t)^{-d/2}\exp(-\eta^2x^2/4t)\|\psi\|_1,$$

而$\|\psi\|_1=\int_{\mathbb{R}^d}\psi(y)dy$. 因此$\limsup_{|x|\to\infty}I_1\leqslant(1-\eta)^{-p}(l+\varepsilon)$，$\limsup_{|x|\to\infty}I_2=0$. 由$\eta,\varepsilon$的任意性即得

$$\limsup_{|x|\to\infty}|x|^pS_t\psi(x)\leqslant l,$$

从而$\lim_{|x|\to\infty}|x|^pS_t\psi(x)=l$.

往证第二个等式. 由于$S_t\psi(x)\geqslant V_t\psi(x)$，所以

$$\limsup_{|x|\to\infty}|x|^pV_t\psi(x)\leqslant l.$$

另一方面，由引理6.1.2(ii)，$V_t\psi(x)\geqslant S_t\psi(x)-tS_t\psi^2(x)$. 同前面的证明，我们知道

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^{2p}S_t\psi^2(x)=l^2,$$

所以

$$\liminf_{|x|\to\infty}|x|^pV_t\psi(x)\geqslant l,$$

从而$\lim_{|x|\to\infty}|x|^pV_t\psi(x)=l$. □

命题6.2.5 设$p>d$，若$\psi\in K_p(\mathbb{R}^d)$使得$\lim_{|x|\to\infty}|x|^p\psi(x)$存在，那么对于所有的$\delta>0$，存在$\eta>0$使得对于$0\leqslant t\leqslant\eta$，$|V_t\psi-\psi|\leqslant\delta\psi_p$，其中$\phi_p(x)=(1+|x|)^{-p}$. 若用$S_t$代替$V_t$，该估计仍有效.

证明 首先我们把问题简化. 由引理6.1.2知，

$$|V_t\psi-\psi|\leqslant|V_t\psi-S_t\psi|+|S_t\psi-\psi|\leqslant tS_t\psi^{1+\beta}+|S_t\psi-\psi|.$$

因此，我们仅需对S_t证明结论成立即可. 由于ψ/ϕ_p是连续的且在无穷远处极限存在，因此对于任意$\delta>0$，我们可以找到它的一阶

导数有界的一致 δ-光滑逼近 ψ_1 ①. 取 $\tilde{\psi}:=\psi_1\phi_p$. 则 $|\tilde{\psi}-\psi|=\phi_p|\psi_1-\psi/\phi_p|<\delta\phi_p$，于是

$$|S_t\psi-\psi|\leqslant|S_t\tilde{\psi}-\tilde{\psi}|+|S_t\tilde{\psi}-\psi|+|\tilde{\psi}-\psi|$$
$$\leqslant|S_t\tilde{\psi}-\psi|+\delta S_t\phi_p+\delta\phi_p.$$

由此看出，我们仅需证明当 ψ 是光滑的且 $|\nabla\psi|\leqslant c\phi_p$（$c$ 为一个常数）时该引理成立即可. 这时，

$$|S_t\psi(x)-\psi(x)|\leqslant\left(\int_{B_1}+\int_{B_2}+\int_{B_3}\right)pt(x-y)|\psi(y)-\psi(x)|dy,$$

其中

$$B_1=\{y\in\mathbb{R}^d:|x-y|<l\,t^{1/2}\},$$
$$B_2=\{y\in\mathbb{R}^d:l\,t^{1/2}\leqslant|x-y|<|x|/2\},$$
$$B_3=\{y\in\mathbb{R}^d:|x|/2\leqslant|x-y|\},$$

并选取 l 使得 $\int_{\{|y|>l\}}|y|p_1(y)dy$ 充分小.

对于给定的 $\delta>0$ 和足够小的 t，B_1 及 B_2 上的积分可由 $\delta\phi_p$ 控制. 而且对于 $|x|\geqslant2$，B_3 上的积分同样也由 $\delta\phi_p$ 控制. 再注意到 S_t 是强连续半群，所以对于 $|x|\leqslant2$，当 t 足够小时，$|S_t\psi(x)-\psi(x)|$ 也充分小. 另外 ϕ_p 在 $\{x:|x|\leqslant2\}$ 上有正的下界，于是即知所需估计对于所有 $x\in\mathbb{R}^d$ 成立. □

系6.2.6 对于 $T>0$，存在常数 $C(T)>0$ 使得对于所有 $t\in[0,T]$，$S_t\phi_p\leqslant C(T)\phi_p$.

证明 对于 $\delta=1$，由命题6.2.2我们可选 η 以及整数 $n>\eta T$，使得对于 $t\in[0,T]$.

$$S_t\phi_p=(S_{t/n})^n\phi_p\leqslant(1+\delta)^n\phi_p=2^n\phi_p.$$

因此取 $C(T)=2^n$ 即得所要结果. □

6.2.2 缓增测度值空间上的超 Brown 运动占位时过程

现在我们来定义取缓增测度空间超 Brown 运动的占位时过

① 称函数 f 为函数 g 的 ε-一致光滑逼近，如果 f 是光滑函数，且 $|f-g|<\varepsilon$ 在定义域上一致成立.

程 Y_t：

$$\langle Y_t,\phi\rangle := \int_0^t \langle X_s,\phi\rangle ds, \phi \in K_p(\mathbb{R}^d).$$

由注6.2.3，超 Brown 运动无论状态空间如何，分枝粒子系统的演化规律是一样的，因此对于取缓增测度空间的超 Brown 运动，由定理4.4.2，我们仍有如下(X_t,Y_t)的拉普拉斯表现定理.

系6.2.7 设 $\mu\in M_p(\mathbb{R}^d)$，$\phi,\psi\in K_p(\mathbb{R}^d)_+$，则

$$P^\mu[\exp(-\langle X_t,\psi\rangle - \langle Y_t,\phi\rangle)] = \exp[-\langle \mu, U_t^\phi\psi\rangle], t \geqslant 0, \tag{6.2.5}$$

其中 $U_t^\phi(\psi)$满足如下方程的 mild 解：

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \triangle u(t) - u^{1+\beta}(t) + \phi, \\ u(0) = \psi. \end{cases} \tag{6.2.6}$$

特别地，若 $\phi,\psi\in D(\triangle)$，则 $U_t^\phi(\psi)$是上面方程的强解. □

注6.2.8 Iscoe(1986)[93]用黎曼积分的求和逼近和 Trotter-Lie 公式给出了上述推论的一个直接证明. 超 Brown 运动占位时过程是一个研究很多的问题之一. Iscoe 首先开创了这方面的工作，后来又有很多人从事这方面的研究.

引理6.1.2及命题6.2.4，6.2.5分别给予出了非线性半群 V_t 的若干性质. 当然有兴趣的读者或许可以给出更精细的结果. 更好的估计对深入研究超过程肯定是有用的. □

§6.3 超 Brown 运动的首中概率

本节，我们考虑有限测度空间上分枝特征为 $\Psi(x,\lambda)=\lambda^2$ 的超 Brown 运动.

设 A 是一个$\mathbb{R}^d$ 的 Broel 子集，令 $T_A=\inf\{t>0, X_t(A)>0\}$，我们称此为 X_t 首次负荷(charging) A 的时间. 再令 $T'_A=\inf\{t>0, \mathrm{supp}(X_t)\cap A\neq\varnothing\}$，则称其为 X_t 首中(hitting) A 的时间. 由定理4.3.2，X_t 关于 $M_F(\mathbb{R}^d)$的弱拓扑是连续的，所以 T_A 相对于 X_t 生成的自然 σ-域是停时. 且当 A 是开集时，易证 $T_A=T'_A$ a.s.-P^μ.

记(B_t,P_x)为$\mathbb{R}^d$上的标准 Brown 运动，定义它的首中时$\tau_A=\inf\{t>0,B_t\in A\}$. 称$x$是$A$的**正则点**，如果$P_x(\{\tau_A=0\})=1$. 这里$P_x$表示从$x$点出发的 Brown 运动的概率. 并记$A'$为$A$的正则点的集合.

命题6.3.1 对于任意$\mu\in M_F(\mathbb{R}^d)$，若$\text{supp}(\mu)\cap A'=\varnothing$，则$P^\mu\{T'_A=0\}=1$.

证明 由 Le Gall 的超 Brown 运动的轨道构造易得. 用粒子系统逼近方法的证明，请参见文献[224]. □

上述定理给出了一个类似于 Brown 运动正则性的结果. 下面我们将进一步研究当$\text{supp}(\mu)\cap A'=\varnothing$时首中时的分布. 为简单起见，设$A=B(0,a)^c$，其中$B(0,a)$是一中心在原点，半径为$a$闭球.

下面的结果给出了T_A的分布.

定理6.3.2 设$x\in B(0,a)$，$t>0$，则

$$P^{\delta_x}\{T_A>t\}=\exp\{-u(t,x)\},\tag{6.3.1}$$

其中$u(t,x)$是如下奇异非线性抛物方程的唯一解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x)=\triangle u(t,x)-u^2(t,x),x\in B(0,a);\\ u(0,x)=0;\\ u(t,x)\to\infty,\text{当 }|x|\to a_-,t>0.\end{cases}\tag{6.3.2}$$

证明 取$Y_t=\int_0^t X_s ds$，即X_s的占位时过程. 任意固定的$t\geqslant 0$，它是一个有限测度. 对于整数$n>0$，设

$$\phi_n(x)=\begin{cases}0, & |x|\leqslant a,|x|\geqslant n+1,\\ n(|x|-a), & a<|x|\leqslant a+1/n,\\ 1, & a+1/n<|x|\leqslant n,\\ n+1-|x|, & n<|x|\leqslant n+1.\end{cases}$$

显然$\{\phi_n\}$是一列关于n单增且具有紧支撑的连续函数.

由推论6.2.7，我们知道对于$\theta>0$，

$$E^\mu\exp(-\langle Y_t,\theta\phi_n\rangle)=\exp(-\langle u_{\theta,n}(t,x),\mu\rangle),\tag{6.3.3}$$

其中$u_{\theta,n}(t,x)$满足

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \triangle u(t,x) - u^2(t,x) + \theta\phi_n(x); \\
u(0,x) = 0.
\end{cases}
\tag{6.3.4}
$$

为完成定理6.3.2之证明，还需要如下几个引理.

引理6.3.3 $u_{\theta,n}(t,x)$关于θ,n,t是单增的.

证明 由$\{\phi_n\}$的单增性和方程(6.3.3)立得. □

引理6.3.4 $u_{\theta,n}(t,x)\to u_\theta(t,x)(n\to\infty)$，则$u_\theta(t,x)$有限，关于$\theta,t$单增，且是如下方程的一个弱解(也是 mild 解)：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \triangle u(t,x) - u^2(t,x) + \theta 1_{B(0,a)^c}; \\
u(0,x) = 0.
\end{cases}
\tag{6.3.5}
$$

证明 对于任意固定的θ，

$$
\begin{aligned}
u_{\theta,n}(t,x) &= -\int_0^t S_{t-s}(u_{\theta,n}^2(t,x))ds + \int_0^t S_{t-s}\theta\phi_n ds \\
&\leqslant \theta t.
\end{aligned}
$$

由单调收敛定理知极限$u_{\theta,n}(t,x)\to u_\theta(t,x)$存在. $u_\theta(t,x)$关于θ,t的单调性显然. 再由控制收敛定理可知$u_\theta(t,x)$是方程(6.3.5)的 mild 解. 进一步，容易验证它也是弱解. □

引理6.3.5 当$|x|\geqslant a$，$u_\theta(t,x)\to\infty(\theta\to\infty)$. 对于任一$a_0<a$，存在一个常数$C(a_0)$使得$u_{\theta,n}(t,x)\leqslant C(a_0)$，$u_\theta(t,x)\leqslant C(a_0)$，$x\in B(0,a_0)$，$\theta,n$及$t$. 而且，限制在$B(0,a_0)$上，$u_\theta(t,x)\to u_\infty(t,x)(\theta\to\infty)$存在，$u_\infty(t,x)$是方程(6.3.2)的弱解.

证明 先证明引理的前半部分.

当$|x|\geqslant a$，那么$x\in A'$，于是由命题6.3.1，$Y_t(A)>0$ a.s. $-P^{\delta_x}$，从而$\langle Y_t,\phi_n\rangle>0$ a.s. $-P^{\delta_x}$，

$$
E^{\delta_x}\exp(-\langle Y_t,\theta\phi_n\rangle)\to 0(\theta\to\infty).
$$

由公式(6.3.3)，

$$
u_{\theta,n}(t,x) = -\log E^{\delta_x}\exp(-\langle Y_t,\theta\phi_n\rangle)\to\infty(\theta\to\infty).
$$

既然$u_\theta\geqslant u_{\theta,n}$，故$u_\theta\to\infty(\theta\to\infty)$即为所求.

当$|x|\leqslant a_0<a$，我们有

$$
0<u_{\theta,n}(t,x)
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\log P^{\delta_x}\exp(-\langle Y_t,\theta\phi_n\rangle) \\
&= -\log(P^{\delta_x}(\langle Y_t,\theta\phi_n\rangle = 0) \\
&\quad + P^{\delta_x}(\exp(-\langle Y_t,\theta\phi_n\rangle),\langle Y_t,\phi_n\rangle > 0)) \\
&\leqslant -\log(P^{\delta_x}(\langle Y_t,\phi_n\rangle = 0)) \\
&\leqslant -\log(P^{\delta_x}(\mathrm{supp}(Y_t) \subset B(0,a))) \\
&= -\log(P^{\delta_x}(\textstyle\bigcup_{s\leqslant t}\mathrm{supp}(X_t) \subset B(0,a))) \\
&\leqslant -\log(P^{\delta_x}(X_t\ \text{从未负荷}\ A)) \\
&= -\log(\exp(-a^{-2}u(a^{-1}x))) \quad \text{由(定理 11.2.9)} \\
&= a^{-2}u(a^{-1}x) \leqslant a^{-2}u(a^{-1}a_0),
\end{aligned}
$$

其中 $u(x)$ 是下面方程的唯一解：

$$
\begin{cases} \triangle u(x) = u^2(x),\ x \in B(0,1); \\ u(x) \to \infty \quad |x| \to 1^-. \end{cases} \tag{6.3.6}
$$

取 $C(a_0)=a^{-2}u(a^{-1}a_0)$ 即完成了本引理前半部分的证明. 至于验证 $u_\infty(t,x)$ 是弱解，只需对检验函数 $\phi(t,x)\in C^\infty([0,\infty)\times B(0,a_0))$ 考虑即可，而这由(6.3.5)及控制收敛定理立得. □

到目前为止，我们已经证明了 u_∞ 是(6.3.2)的弱解，更进一步，我们希望能证明它也是强解. 我们将逐步达此目的.

引理6.3.6 任意给定 $T>0, a_0<a$，则 $u_{\theta,n}\to u_\theta(n\to\infty)$ 和 $u_\theta\to u_\infty(\theta\to\infty)$ 在 $[0,T]\times B(0,a_0)$ 上是一致收敛的. 并且 u_∞ 在 $[0,\infty)\times B(0,a)$ 上连续.

证明 对于任一固定的 θ，由引理6.3.3，如果 $n\geqslant m$ 则 $u_{\theta,n}\geqslant u_{\theta,m}$. 因此

$$
\triangle(u_{\theta,n}(t,x) - u_{\theta,m}(t,x)) - \frac{\partial}{\partial t}(u_{\theta,n}(t,x) - u_{\theta,m}(t,x))
$$

$$
= u_{\theta,n}^2(t,x) - u_{\theta,m}^2(t,x) \geqslant 0,
$$

所以，由极大值原理(见引理11.1.1)，

$$
|u_{\theta,n}(t,x) - u_{\theta,m}(t,x)| \leqslant \sup_{|x|=a_0} |u_{\theta,n}(T,x) - u_{\theta,m}(T,x)|.
$$

另外，容易看到 $u_{\theta,n}$ 是关于原点旋转对称的. 因此，

$$
\sup_{|x|=a_0} |u_{\theta,n}(t,x) - u_{\theta,m}(t,x)| = |u_{\theta,n}(T,x_0) - u_{\theta,m}(T,x_0)|,
$$

$x_0\in\partial B(0,a_0)$. 结合引理6.3.4，得到 $u_{\theta,n}(t,x)\to u_\theta(t,x)(n\to\infty)$ 在 $[0,T]\times B(0,a_0)$ 上的一致性. 类似地，我们可证 $u_\theta(t,x)\to u_\infty(t,x)(\theta\to\infty)$ 在 $[0,T]\times B(0,a_0)$ 上的一致性. 证毕. □

引理6.3.7 $u_\infty(t,x)\in C^1([0,\infty))\cap C^2(B(0,a))$.

证明 只需证明 $u_\infty(t,x)\in C^1([0,T])\cap C^2(B(0,a_0))$, $T>0$, $a_0<a$. 在 $[0,T]\times B(0,a_0)$ 中考虑方程(6.3.4)，由方程解的唯一性知 $u_{\theta,n}$ 必满足如下的边值问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x)=\triangle u(t,x)-u^2(t,x),\ (t,x)\in(0,T)\times B(0,a_0);\\
u(0,x)=0;\\
u(t,x)\big|_{x\in\partial B(0,a_0)}=u_{\theta,n}(t,x)\big|_{x\in\partial B(0,a_0)}.
\end{cases}
\tag{6.3.7}
$$

显然，该方程等价于

$$
u(t,x)=v(t,x)-\int_{[0,t]\times B(0,a_0)}g(x,y,t-s)u^2(s,y)dsdy,
\tag{6.3.8}
$$

其中 $v(t,x)$ 满足

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t}v(t,x)=\triangle v(t,x),\\
v(0,x)=0,\\
v(t,x)\big|_{\partial B(0,a_0)}=u_{\theta,n}(t,x)\big|_{\partial B(0,a_0)},t>0,
\end{cases}
\tag{6.3.9}
$$

而且 $g(x,y,t)$ 是 $[0,T]\times B(0,a_0)$ 上的格林函数. 由 Picard 迭代，易知方程(6.3.8)存在唯一解. 由文献[36]，(7.3)，pp. 270－271，$v(t,x)$ 可以表示为

$$
v(t,x)=-\frac{\sigma^2}{2}\int_{[0,t]\times\partial B(0,a_0)}v(s,y)D_n g(x,y,t-s)dsdy,
\tag{6.3.10}
$$

其中 D_n 表示柱集 $[0,T]\times\partial B(0,a_0)$ 的外法线方向导数，σ 是一常数. 由(6.3.8)，(6,3,10)，引理6.3.3～6.3.5及控制收敛定理，我们有

$$0 < u_\infty(t,x)$$
$$= -\frac{\sigma^2}{2}\int_{[0,t]\times\partial B(0,a_0)} u_\infty(s,y)D_n g(x,y,t-s)dsdy$$
$$-\int_{[0,t]\times B(0,a_0)} g(x,y,t-s)u_\infty^2(s,y)dsdy.$$

另外 $u_\infty(t,x)$在$[0,\infty)\times\overline{B(0,a_0)}$上的连续性可导出上式右边两项的充分光滑性，即 $u_\infty(t,x)\in C^1([0,T])\times C^2(B(0,a_0))$. □

再由极大值原理(见引理11.1.1)，

引理6.3.8 u_∞是奇异方程(6.3.2)的唯一正解.

引理6.3.2的证明. 实际上，由以上引理，我们只需验证(6.3.1)式成立. 对于 $x\in B(0,a)$,

$$P^{\delta_x}(T_A > t)$$
$$= P^{\delta_x}(X_s(A) = 0, s < t)$$
$$= P^{\delta_x}\left(\int_0^t X_s(A)ds = 0\right) \quad (\text{由 } X_t \text{ 连续性})$$
$$= P^{\delta_x}\left(\exp\left(-\int_0^t X_s(A)ds\right), \int_0^t X_s(A)ds = 0\right)$$
$$= P^{\delta_x}\left(\lim_{\theta\to\infty}\exp\left(-\theta\int_0^t X_s(A)ds\right)\right)$$
$$= \lim_{\theta\to\infty} P^{\delta_x}\exp(-\langle Y_t, \theta 1_A\rangle)$$
$$= \lim_{\theta\to\infty}\lim_{n\to\infty} P^{\delta_x}\exp(-\langle Y_t, \theta\phi_n\rangle)$$
$$= \lim_{\theta\to\infty}\lim_{n\to\infty}\exp(-u_{\theta,n}(t,x)) \quad (\text{由引理 } 6.3.3)$$
$$= \lim_{\theta\to\infty}\exp(-u_\theta(t,x)) \quad (\text{由引理 } 6.3.4, 6.3.5)$$
$$= \exp(-u_\infty(t,x)) \quad (\text{由引理 } 6.3.5).$$

证毕. □

若在定理6.3.2中令 $t\to\infty$，则得

定理6.3.9(Iscoe(1988,[95])) 设 $x\in B(0,a), t>0$，则

$$P^{\delta_x}\{T_A = \infty\} = \exp\{-u(x)\}, \qquad (6.3.11)$$

其中 $u(x)$是如下奇异非线性方程的唯一解

$$
\begin{cases}\triangle u(t,x) = u^2(t,x),\ x \in B(0,a); \\ u(x) \to \infty \text{ 当 } |x| \to a_-.\end{cases} \tag{6.3.12}
$$

上述 Iscoe 的结果是定理11.2.9的一个特殊情况，而后者的证明不依赖于本节的内容. 因此，尽管定理6.3.2的证明中用到这一结论，其证明过程仍是有效的.

注6.3.10 由定理6.3.9，当初始测度 μ 的支撑与 $\overline{D}$ 有一段距离时，X_t 以正概率达不到 D，但又以正概率碰到 D.

在本节的开始，我们给出了两种首中时间的定义. 这两种定义强调了 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 不同侧面的性质. 一般来讲，它们有很大的区别. 其简单关系如下：

注6.3.11 设 $D\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$，则

(i) $T'_D\leqslant T_D$，a. s. -P^μ；

(ii) 若 D 的 Lebesgue 测度为零，则 $T_D=\infty$，a. s. -P^μ；另一方面，若 $d\leqslant 3$，且 $D=\varnothing$，则 $P^\mu(T'_D<\infty)>0$；

(iii) 若 D 为开集；或 $d>4$，$x^{d-4}-m(D)=0$；或 $d=4$，$\left(\log\dfrac{1}{x}\right)^{-1}-m(D)=0$. 则 $T_D=T'_D$，a. s. -P^μ. $\phi-m(\cdot)$ 表示 Hausdorffϕ-测度.

其证明见1992年赵学雷博士学位论文[223].

注6.3.12 Tribe(1991)[190]证明了超 Brown 运动 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 的支撑集 $S(X_t)$ 是几乎处处不连通的，但具有 Brown 运动轨道的 Hausdorff 分形维数及 Hausdorff 测度函数（参见文献[29，156]等）. 一方面，通过对比不难发现，超 Brown 运动在固定时刻支撑集的几何性质与 Brown 运动的轨道的几何性质有很多相似之处. 另一方面，它们又的确有许多本质上不同的性质（参见文献[8]）. 无论如何，我们可以通过类比 Brown 运动来研究超 Brown 运动的部分问题或预见有关结果.

§6.4 超 Brown 运动关于区域的首中方式

设 D 是一个区域. 本节研究超 Brown 运动在 T_D 时刻，

$S(X_{\tau_D})\cap\overline{D}$ 是什么样的集合.

记 Vol(D)为 D 的体积. 若 D 是光滑区域,令

$$A(\partial D):=\begin{cases}D\text{ 的表面积}, & \text{若 } d\geqslant 2;\\ D\text{ 的边界点的个数}, & \text{若 } d=1.\end{cases}$$

记 $d(x,y)=\|x-y\|$,对$\forall\ \varepsilon>0$,定义

$$D^{\varepsilon}:=\{x\in\mathbb{R}^d;d(x,D)<\varepsilon\}.$$

则 D^{ε} 为$\mathbb{R}^d$ 中的开集. 对任意集合 A,令 $\# A$ 表示集 A 所含元素的个数.

定义6.4.1 对 $D\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$,称 $D\in\mathscr{H}_0$,如果下式成立

$$\mathrm{Vol}(D^{\varepsilon})\leqslant c(D)\varepsilon,\quad\forall\ 0<\varepsilon<\varepsilon_0(D),\qquad(6.4.1)$$

其中 $c(D)$和 $\varepsilon_0(D)$是只与集合 D 有关的常数.

例如,当 $d=3$,令 $B:=B(0,r)=\{x\in\mathbb{R}^d;d(0,x)<r\}$. 则

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\partial B^{\varepsilon})&=\mathrm{Vol}(B(0,r+\varepsilon))-\mathrm{Vol}(B(0,r-\varepsilon))\\&=8\pi r^2\varepsilon+\frac{8}{3}\pi\varepsilon^3.\end{aligned}$$

由此可知,$\partial B\in\mathscr{H}_0$.

一般地,容易验证若 $D\subset\mathbb{R}^d$ 是边界为 C^2的有界区域,则 $\partial D\in\mathscr{H}_0$. 本节我们要证

定理6.4.2 设 $D\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$有界,且 $D\in\mathscr{H}_0$,若 $d(z,D)>0$,则对 $M_F(\mathbb{R}^d)$上的超 Brown 运动$\{X_t\}_{t\geqslant 0}$有

$$P^{\delta_z}(\#(S(X_t)\cap D)\leqslant 2,\forall\ t>0)=1.\qquad(6.4.2)$$

为了证明该定理,先证明几个引理. 采用第五章引言和命题5.3.6中的记号,而且约定在没有明确说明的情况下,$\overline{\omega}$ 是给定的.

引理6.4.3 设$0<r<s<t$,$\overline{\omega}(r)=\overline{\omega}(s)=\overline{\omega}(t)=c$,$k_1=K(r,s)$,$k_2=K(s,t)$,且 k_1,$k_2<c$. 若取 $\sigma=\min\{d(z,x_r),d(z,x_s),d(z,x_t),d(x_r,x_s),d(x_r,x_t),d(x_s,x_t)\}>0$,则

$$p(x_r,x_s,x_t)\leqslant M,$$

其中 $M:=M(\overline{\omega},\sigma,d)$是只与 $\overline{\omega}$,σ 和维数 d 有关的常数.

证明 由(5.3.33)得

$$p(x_r,x_s,x_t)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{3d}I^d}}\exp\left\{-\frac{1}{2I}II\right\}.$$

在引理条件下，不难验证 $II>0$，并且：$\lim\limits_{I\to 0}p(x_r,x_s,x_t)=0$. 因而 $\exists\ \kappa>0$，使得当 $I<\kappa$ 时，$p(x_r,x_s,x_t)\leqslant 1$. 当 $I\geqslant\kappa$ 时，$p(x_r,x_s,x_t)\leqslant\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{3d}\kappa}}$，令

$$M\triangleq\max\left\{1,\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{3d}\kappa}}\right\}.$$

则引理得证.

引理6.4.4 设 $D\in\mathscr{H}_0$有界. 令 $d_0:=d(z,D)$. 设$0<r<s<t$，$k_1:=K(r,s)$，$k_2:=K(s,t)$，且 $k_1,k_2<\overline{\omega}(r)=\overline{\omega}(s)=\overline{\omega}(t)>0$，则对$\forall\ \sigma>0$和$\forall\ \epsilon<\frac{3}{4}d_0\wedge\epsilon_0(D)$，我们有

$$\begin{aligned}Q^{\overline{\omega}}(\omega(r)\in D^\epsilon,\omega(s)\in D^\epsilon,\omega(t)\in D^\epsilon,d(\omega(r),\omega(s))\geqslant\sigma,\\ d(\omega(r),\omega(t))\geqslant\sigma,d(\omega(s),\omega(t))\geqslant\sigma)\\ \leqslant M^3\mathrm{Vol}^3(D^\epsilon)\leqslant C(\overline{\omega},D,\sigma)\epsilon^3.\end{aligned}\tag{6.4.3}$$

其中 M 是引理6.4.3中的常数，$C(\overline{\omega},D,\sigma)$表示只与 $\overline{\omega}$，D 和 σ 有关的常数.

证明 由于

$$\begin{aligned}&Q^{\overline{\omega}}(\omega(r)\in D^\epsilon,\omega(s)\in D^\epsilon,\omega(t)\in D^\epsilon,d(\omega(r),\omega(s))\geqslant\sigma,\\ &\qquad d(\omega(r),\omega(t))\geqslant\sigma,d(\omega(s),\omega(t))\geqslant\sigma)\\ &=\int_{D^\epsilon}\int_{D^\epsilon}\int_{D^\epsilon}1_{\{d(u,v)\geqslant\sigma,d(u,w)\geqslant\sigma,d(v,w)\geqslant\sigma\}}p(u,v,w)dudvdw\\ &\leqslant M(\mathrm{Vol}(D^\epsilon))^3.\end{aligned}$$

由 $\mathscr{H}_0$的定义可知引理成立. □

令 $h(t)=\sqrt{\left(t\log\frac{1}{t}\right)\wedge 1}$. 由文献[29]，Th. 1.1①知道，对于$\mathscr{R}$-a. s. $\overline{\omega}$，$Q^{\overline{\omega}}$-a. s. $\omega\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$，$\exists\ \delta(\overline{\omega},\omega)>0$，使得对$\forall s,t\geqslant 0$，若$0<t-s<\delta(\overline{\omega},\omega)$有

① 该结论也可由 Le Gall 的构造证明.

$$S(X_t(\bar{\omega},\omega)) \subset S(X_s(\bar{\omega},\omega))^{3h(t-s)}. \qquad (6.4.4)$$

而且

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty}((\bar{\omega},\omega):\delta(\bar{\omega},\omega) > 1/k)) = 1. \qquad (6.4.5)$$

其中 $P(d(\bar{\omega},\omega))=\mathscr{R}(d\bar{\omega})Q^{\bar{\omega}}(d\omega)$.

引理6.4.5 设 $D\in\mathscr{H}_0$，对$\forall\ k\in\mathbb{N}$，$\forall\ 0<a<b$，$\forall\ \sigma>0$，若定义

$$\begin{aligned} N_{\sigma,k}^{\omega,a,b}:=\bigcup_{\theta\in[a,b]}\{\omega,\delta(\omega)>1/k;\exists\ r<s<t\in L_{\theta}^{\bar{\omega}},\text{s.t.},\\ \omega(r)\in D,\omega(s)\in D,\omega(t)\in D,d(\omega(r),\omega(s))>\sigma,\\ d(\omega(r),\omega(t))>\sigma,d(\omega(s),\omega(t))>\sigma\}, \end{aligned}$$

其中 $L_{\theta}^{\bar{\omega}}=\{s,\bar{\omega}(s)=\theta,s\leqslant\eta\bar{\omega}\}$（如命题5.3.7所定义），则 $Q^{\bar{\omega}}(N_{\sigma,k}^{\bar{\omega},a,b})=0$.

证明 由于对$\forall\ a<\bar{b}\leqslant b$，$L_{\bar{b}}^{\bar{\omega}}$是一可列点集，可把其中的元素排成一列 $L_{\bar{b}}^{\bar{\omega}}=\{r_1^{\bar{b}},r_2^{\bar{b}},r_3^{\bar{b}},\cdots\}$，使得对$\forall\ i\neq j$，若 $i<j$，则游程$(\bar{b},(r_i^{\bar{b}},\tilde{r}_i^{\bar{b}}))$的高度比$(\bar{b},(r_j^{\bar{b}},\tilde{r}_j^{\bar{b}}))$的高度大. 其中 $\tilde{r}_i^{\bar{b}},\tilde{r}_j^{\bar{b}}$ 分别是 $r_i^{\bar{b}},r_j^{\bar{b}}$ 的等价点，且不妨设 $r_i^{\bar{b}}<\tilde{r}_i^{\bar{b}},r_j^{\bar{b}}<\tilde{r}_j^{\bar{b}}$. 对$\forall\ a<\theta<\bar{b}$，在 $L_{\theta}^{\bar{\omega}}$ 中增加一些点构成集合 $L_{\theta}^{\bar{\omega}\bar{b}}\triangleq\{r_1^{\bar{b}\theta},r_2^{\bar{b}\theta},\cdots\}$（集合元素没有变化，只是某些元素增加出现次数或调换次序），使得对$\forall\ i\geqslant1$，有$(r_i^{\bar{b}},\tilde{r}_i^{\bar{b}})\subset(r_i^{\bar{b}\theta},\tilde{r}_i^{\bar{b}\theta})$，并仍保持 $L_{\theta}^{\bar{\omega}\bar{b}}$ 为可数集. 现在我们把 $L_{\theta}^{\bar{\omega}\bar{b}}$ 的点进行三元重组. 易知三元重组后的集合也是可数集，并设第 m 个组合为$(s_1^{m\theta}<s_2^{m\theta}<s_3^{m\theta})$. 对 $m\geqslant1$定义

$$\begin{aligned} N_{\sigma,k,\bar{b},m}^{\bar{\omega},a,b}:=\bigcup_{\theta\in[a,\bar{b}]}\{\omega:\delta(\omega)>1/k;\omega(s_1^{m\theta})\in D,\omega(s_2^{m\theta})\in D,\\ \omega(s_3^{m\theta})\in D;d(\omega(s_1^{m\theta}),\omega(s_2^{m\theta}))>\sigma,\\ d(\omega(s_1^{m\theta}),\omega(s_3^{m\theta}))>\sigma,d(\omega(s_2^{m\theta}),\omega(s_3^{m\theta}))>\sigma\}. \end{aligned}$$

把$[a,\bar{b}]n$ 等分，让 n 充分大使得$\dfrac{\bar{b}-a}{n}<\dfrac{1}{k}$，且$3h\left(\dfrac{\bar{b}-a}{n}\right)<\dfrac{1}{4}\sigma$. 则由(6.4.4)有

$$N_{\sigma,k,\bar{b},m}^{\bar{\omega},a,b}\subseteq\bigcup_{l=1}^{n}\Bigg\{\omega:\omega(s_1^{m\theta(l)})\in D^{3h(\frac{\bar{b}-a}{n})},\omega(s_2^{m\theta(l)})\in D^{3h(\frac{\bar{b}-a}{n})},$$

$$\omega(s_3^{m\theta(l)})\in D^{3h(\frac{\bar{b}-a}{n})},d(\omega(s_1^{m\theta(l)}),\omega(s_2^{m\theta(l)}))>\frac{\sigma}{2},$$

$$d(\omega(s_1^{m\theta(l)}),\omega(s_3^{m\theta(l)}))>\frac{\sigma}{2},d(\omega(s_2^{m\theta(l)}),\omega(s_3^{m\theta(l)}))>\frac{\sigma}{2}\Big\},$$

其中 $\theta(l)=a+\frac{\tilde{b}-a}{n}(l-1)$. 因此由引理6.4.4得

$$\begin{aligned}
&Q^{\bar{\omega}}(N_{\sigma,k,\tilde{b},m}^{\bar{\omega},a,b}) \\
&\leqslant Q^{a}\sum_{l=1}^{n}\{\omega:\omega(s_1^{m\theta(l)})\in D^{3h(\frac{\tilde{b}-a}{n})},\omega(s_2^{m\theta(l)})\in D^{3h(\frac{\tilde{b}-a}{n})}, \\
&\quad \omega(s_3^{m\theta(l)})\in D^{3h(\frac{\tilde{b}-a}{n})},d(\omega(s_1^{m\theta(l)}),\omega(s_2^{m\theta(l)}))>\frac{\sigma}{2}, \\
&\quad d(\omega(s_1^{m\theta(l)},\omega(s_3^{m\theta(l)}))>\frac{\sigma}{2},d(\omega(s_2^{m\theta(l)}),\omega(s_3^{m\theta(l)}))>\frac{\sigma}{2}\} \\
&\leqslant \sum_{l=1}^{n}\mathrm{const}\left(3h\left(\frac{\tilde{b}-a}{n}\right)\right)^{3} \\
&= \mathrm{const}\ n\left(\frac{\tilde{b}-a}{n}\log\frac{n}{\tilde{b}-a}\right)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

由 n 的任意性,在上式中令 $n\to\infty$ 得

$$Q^{a}(N_{\sigma,k,\tilde{b},m}^{\bar{\omega},a,b})=0. \tag{6.4.6}$$

令 $N_{\sigma,k,\tilde{b}}^{\bar{\omega},a,b}:=\bigcup_{m=1}^{\infty}N_{\sigma,k,\tilde{b},m}^{\bar{\omega},a,b}$, 从而

$$Q^{\bar{\omega}}(N_{\sigma,k,\tilde{b}}^{\bar{\omega},a,b})=0, \tag{6.4.7}$$

由于 $t\to S(X_t)$是右连左极的,在那些轨道不连续点 t,就有某个粒子死亡,而且所有这些不连续点集 A 是可数集,并且若令 τ 为 X_t 的生命时,则 $\bar{A}=[0,\tau]$. 因此我们有

$$N_{\sigma,k}^{\bar{\omega},a,b}\subseteq\bigcup_{\tilde{b}\in\{b\}\cup(A\cap(a,b])}N_{\sigma,k,\tilde{b}}^{\bar{\omega},a,b},$$

于是由(6.4.7)知

$$Q^{\bar{\omega}}(N_{\sigma,k}^{\bar{\omega},a,b})=0,$$

引理得证. □

引理6.4.6 设 $D\subset\mathscr{H}_0$. 对 $\mathscr{R}$-a.s. $\bar{\omega}$,令

$$N^{\bar{\omega}}:=\bigcup_{\theta>0}\{\omega:\exists\ r<s<t\in\bar{L}_\theta^{\bar{\omega}},\omega(r)\in D,\omega(s)\in D,$$
$$\omega(t)\in D,\omega(r)\neq\omega(s),\omega(r)\neq\omega(t),\omega(s)\neq\omega(t)\}.$$

则有 $Q^{\bar{\omega}}(N^{\bar{\omega}})=0$.

证明 令 Q_+表示正有理数集合,显然

$$N^{\bar{\omega}} = \bigcup_{a<b\in Q_+} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{0<\sigma\in Q_+} N_{\sigma,k}^{\omega,a,b}.$$

则结论由引理6.4.5立得. □

定理6.4.2的证明 实际上,只要证明

$$P^{\delta_z}(\#(S(X_t)\cap D)\geqslant 3,\exists\, t>0)=0.$$

取

$$N:=\{(\bar{\omega},\omega):\bar{\omega}\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+),\omega\in N^{\bar{\omega}}\}\subset\Omega. \tag{6.4.8}$$

显然

$$P(N)=\int\mathscr{R}(d\bar{\omega})Q^{\bar{\omega}}(N\bar{\omega})=0. \tag{6.4.9}$$

由定理5.0.1、命题5.3.7和引理6.4.6得

$$P^{\delta_z}(\#(S(X_t)\cap D)\geqslant 3,\exists\, t>0)\leqslant P^{\delta_z}(N)=0.$$

定理得证. □

由定理6.4.2,

定理6.4.7 设 $D\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$为边界有界的开集且 $\partial D\in\mathscr{H}_0$. 若 $d(z,D)>0$,则

$$\#(S(X_{T_D})\cap\bar{D})\leqslant 2,\quad P^{\delta_z}\text{-a. s.} \tag{6.4.10}$$

证明 以 ∂D 代替定理6.4.2中的 D,并定义集合 N 如(6.4.8). 则 $P(N)=0$,而且

$$P^{\delta_z}(\#(S(X_{T_D})\cap\bar{D})\geqslant 3)\leqslant P(N)=0.$$

证毕. □

注6.4.8 在类似于定理6.4.2,6.4.7结论的证明中,以前人们更多地采用非标准分析的方法. 非标准分析的好处在于可以把极限过程融入"无穷小"之中,从而使证明过程得到简化. 从上面的讨论,我们不难发现 Le Gall 超过程的构造是一个有效的替代方法.

然而,定理6.4.7的结果是不令人满意的. 直观上最终的结果应该是

猜想6.4.9 设 $D\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$为边界有界的开集,且 $\partial D/\in\mathscr{H}_0$,若 $d(z,D)>0$,则

$$\#(S(X_{\tau_D}(\omega)) \cap \bar{D}) \leqslant 1, P^{\delta_x} - \text{a.s.}$$

作者曾就此问题与 Donald A. Dawson 教授讨论过，他指出这是很有意思的问题. 该问题的彻底解决有赖于更好的估计.

超 Brown 运动的研究成果还有很多，有关理论就可以写成一部篇幅较大的专著. 像 Brown 运动那样，超 Brown 运动作为一种样板过程，仍有很多问题值得考虑.

文献评注：本章前两节的内容主要取自于文献[93]，[94]等，但部分证明作了较大修改. 第三节的内容基于[224]. 本章第四节取材于文献[188].

Iscoe (1986)[93,94]比较详细地讨论了超 Brown 运动首中概率及其极限行为. 基于类似的想法，鲍玉芳[6]研究了超 OU-过程的一些性质，唐加山[187]研究了一类流形上超 Brown 运动的有关问题. 从他们的结果我们不难看出底过程、空间结构对超过程的影响. 李存行[127]给出了超 Brown 运动末离区域时间的概率分布，坚雄飞[99]对更广的超过程研究了末离时问题.

第七章　超过程的灭绝性

本章讨论有限测度值超过程的极限性质.我们先来讨论当$t\to\infty$时$X_t(1)$的极限行为.一个基本问题是其极限是否为零,即超过程是否灭绝.然后研究超过程灭绝时的矩和超Brown运动灭绝点的分布.最后讨论缓增测度值空间上的超对称稳定过程的局部灭绝性.

§7.1　有限测度值超过程的灭绝性

灭绝性是分枝过程的一个重要研究内容,而超过程的灭绝性早在60年代就有人研究过.本章在较一般的条件下来考虑该问题.设$(E,\mathscr{E})$是Luzin空间,(ξ,P_x)是E上的Markov过程.

考虑分枝机制

$$\psi(x,\lambda)=\gamma(x)\lambda^{1+\beta},\ 0<\beta\leqslant 1,\tag{7.1.1}$$

其中$\gamma\in bp\mathscr{B}(E)$,称其为**分枝速率**.如注3.3.2,按照一般分枝特征的表达式(3.2.7)中的记号,取$b\equiv 0$,$c(x)=2\gamma(x)$,$\nu\equiv 0$,我们就得到$\gamma(x)\lambda^2$;若取$c\equiv 0$及$b(x)=-\gamma(x)(1+\beta)/\Gamma(1-\beta)$,$n(x,du)=\gamma(x)\dfrac{\beta(\beta+1)}{\Gamma(1-\beta)}u^{-(\beta+2)}du$,则得到$\gamma(x)\lambda^{1+\beta}$,$0<\beta<1$.类似于§3.4,把相应的超过程记作$S(\xi,\gamma,\beta,\kappa)$.特别当$\kappa(dt)=dt$时,我们简记为$S(\xi,\gamma,\beta)$.

空间齐次性对我们研究超过程带来很多方便.事实上,早期超过程的研究是在它具有空间齐次性的条件下进行的.

定义7.1.1　设E是一个向量空间.定义测度的位移算子$T_x:M(E)\to M(E)$,

$$\int_E f(y)T_x\mu(dy)=\int_E f(x+y)\mu(dy),$$

$$f \in b\mathscr{B}(E),\ x \in E. \tag{7.1.2}$$

若对于$\forall\ x\in E$,$(X_t, P^{T_x\mu})$与$(T_x X_t, P^\mu)$同分布,则称超过程具有**空间齐次性**(通常又称为平稳性).

三个参数在满足较强的条件下,超过程才可能具有空间齐次性. 事实上,我们有

命题 7.1.2 设E是一个向量空间,γ是常数,$\{\kappa(s,t), s<t\}$是不依赖于x的有限可加泛函. 若ξ是空间齐次的随机过程(如α-对称稳定过程,$0<\alpha\leqslant 2$),则超过程$S(\xi,\gamma,\beta,\kappa)$是空间齐次的.

证明 对$x\in E$,$\phi\in pb\mathscr{B}(E)$,记$\phi_x(\cdot)=\phi(x+\cdot)$. 要证

$$P^{T_x\mu}\exp\{-\langle X_t, \phi\rangle\} = P^\mu\exp\{-\langle X_t, \phi_x\rangle\}.$$

只需证对于$t\geqslant 0$,

$$(V_t\phi)_x \equiv V_t\phi_x, \tag{7.1.3}$$

其中

$$V_t\phi_x = S_t\phi_x - \gamma\int_0^t S_s(V_{t-s}\phi_x)^{1+\beta}\kappa(ds),$$

$$(V_t\phi)_x = (S_t\phi)_x - \gamma\int_0^t S_s(V_{t-s}\phi)_x^{1+\beta}\kappa(ds).$$

由底过程的空齐性,我们有$S_t\phi_x=(S_t\phi)_x$. 由此及初等不等式

$$|a^{1+\beta} - b^{1+\beta}| \leqslant |a-b|(a^\beta + b^\beta),\ a,b>0 \tag{7.1.4}$$

可得,

$$\|(V_t\phi)_x - V_t\phi_x\| \leqslant 2\|\phi\|^\beta\int_0^t \|(V_s\phi)_x - V_s\phi_x\|\kappa(ds), t\geqslant 0. \tag{7.1.5}$$

由 Gronwall 不等式,$\|(V_t\phi)_x-V_t\phi_x\|=0$,即(7.1.3)成立. □

在超过程一些具体问题的研究中,空间齐次性起着重要作用. 但在空间齐次性成立的情况下,却要求γ是常数,这样分枝速率γ的作用就没有表现出来. 若γ不是常数时,超过程就会失去空间齐次性,这样对进一步的研究又会带来困难,从而迫使我们寻找新的思想和方法.

在通常的研究中,类比是一个重要的思考与解决问题的手段. 通过与经典超过程(如超 Brown 运动,超稳定过程等)比较,人们可以观察或预见一些结果,或找到一些解决的途径. 但这样能够做

的毕竟很有限. 而且一般情况下，没有现成的理论可以直接引用.

现在，我们来考虑超过程参数的作用. 通过超过程灭绝性的研究来揭示底过程和分枝特征的联合影响.

由超过程的定义易知，零测度是 X_t 的吸引子. 也就是说，超过程一旦到达零测度，就永远不会离开.

定义 7.1.3 称测度值过程 $(X_t, P^\mu)_{\mu\in M_F(E)}$ 是**灭绝的**，如果 P^μ-a.s.，$X_t(E)\to 0(t\to\infty)$. 换句话说，X_t 在全空间中的质量随时间趋于无穷而趋于零. 令

$$T_e := \inf\{t>0, X_t(1)=0\},$$

称之为超过程的**灭绝时**.

Jiřina(1964)[101]解决了初始测度有限的(一般)测度值分枝过程的灭绝性问题. 特别是，具有常值分枝速率超过程的灭绝性及其有关问题已经成为人们重点研究的对象. 这里，将分别对常值分枝速率与非常值分枝速率两种情况讨论有限测度值超过程的灭绝性.

7.1.1 常值分枝速率超过程的灭绝性

定理 7.1.4 设 X_t 是 $S(\xi,\gamma,\beta)$-型超过程. 底过程 ξ 是 E 上保守的右过程(即 $S_t1=1$)，$\gamma>0$ 为常数. 则对任意的 $\mu\in M_F(E)$，X_t 是 a.s.-P^μ 灭绝的. 灭绝时的分布为

$$P^\mu\{T_e<t\} = \exp\{-(\gamma\beta t)^{-1/\beta}\mu(E)\}. \tag{7.1.6}$$

证明 考虑方程

$$V_t + \int_0^t S_s\gamma V_{t-s}^{1+\beta}ds = \lambda, \lambda>0. \tag{7.1.7}$$

该方程的唯一解为

$$V_{t,\lambda} = (\lambda^{-\beta}+\gamma\beta t)^{1/\beta}. \tag{7.1.8}$$

显然，该解与 x 无关. 由于零测度是吸引子，

$$\begin{aligned} P^\mu\{T_e<t\} &= P^\mu(X_t(E)=0) \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} P^\mu \exp\{-\langle X_t,\lambda\rangle\} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty}\exp\{-\langle\mu,V_{t,\lambda}\rangle\}$$

$$= \exp\{-(\gamma\beta t)^{-1/\beta}\mu(E)\}. \qquad (7.1.9)$$

从而

$$\lim_{t\to\infty}P^{\mu}(X_t(E)=0)=1.$$

证毕. □

注 7.1.5 由式(7.1.6)知,对于任何 $\mu\in M_F(E)$,P^{μ}-a.s.,当 t 足够大时,$X_t=0$,从而 $S(X_t)=\varnothing$.

7.1.2 非常值分枝速率超过程的灭绝性

从上面的证明可以看出,γ 为常数使得我们很容易把有关非线性积分方程的解精确表示出来,从而轻而易举地解决问题.然而,对于 γ 不是常数的情况,我们不可能给出方程解的初等表达式,从而问题变得比较复杂.因此相应超过程的灭绝性是一个更有兴趣的问题.下面考虑超过程 $S(\xi,\gamma,\beta,\kappa)$ 的灭绝性.先从一个假设开始.

假设 7.1.6 设 $\mathscr{L}$ 是 E 上的 σ-有限测度.假设对于任意 $x\in E$ 和 $t>0$,概率测度 $P_x(\xi_t\in\cdot)$ 相对于 $\mathscr{L}$ 绝对连续,而且当 $B\in\mathscr{E}$,$\mathscr{L}(B)>0$ 时 $P_x(\xi_t\in B)>0$.

显然,该假设对很多情况是适用的.比如 $\mathbb{R}^d$ 上的扩散过程、对称稳定过程等(相应的参考测度 $\mathscr{L}$ 为 Lebesgue 测度),或具有可数状态非退化 Markov 链(相应的参考测度 $\mathscr{L}$ 为计数测度).

为了考察是否 $X_t(E)\xrightarrow{\text{a.s.}}0(t\to\infty)$,自然需要首先研究方程

$$V_tf(x)+\int_0^t S_s\gamma(x)(V_{t-s}f)^{1+\beta}(x)ds=S_tf(x),$$

$$x\in E \qquad (7.1.10)$$

解 $V_tf(x)$ 当 $f\equiv1$ 时的极限行为.为了使得结果更具一般性,考虑底过程 ξ 的**上平均函数类**(super mean functions):

$$H=\{f\in p\mathscr{B}(E);S_tf\leqslant f,t\geqslant0\}.$$

显然,$1\in H\neq\varnothing$.

引理 7.1.7 若 $f\in H$，则 V_tf 关于 $t\geqslant 0$ 单调下降，从而 $V_tf \downarrow V_\infty f$. $V_\infty f$ 是非线性半群 V_t 的不变函数，且 $\langle X_t,f\rangle \xrightarrow{\text{a.s.}}$ 某一随机变量 $X_\infty(f)$.

证明 由于 $V_tf\leqslant S_tf\leqslant f$,

$$
\begin{aligned}
P^{\delta_x}\{e^{-\langle X_t,f\rangle}|X_u,u\leqslant s\} &= P^{X_s}e^{-\langle X_{t-s},f\rangle} \\
&= e^{-\langle X_s,V_{t-s}f\rangle} \quad (\text{Markov 性}) \\
&\geqslant e^{-\langle X_s,f\rangle}.
\end{aligned}
\tag{7.1.11}
$$

所以，$e^{-\langle X_t,f\rangle}$ 是有界下鞅. 因此，V_tf 关于 $t\geqslant 0$ 单调下降. 注意到 V_tf 非负，则极限 $V_tf\downarrow V_\infty f(t\uparrow+\infty)$ 存在.

进一步，对于任意 $t>0$,

$$
\begin{aligned}
V_\infty f(x) &= \lim_{s\to\infty}V_sf(x) = \lim_{s\to\infty}(-\log P^{\delta_x}\exp\{-\langle X_s,f\rangle\}) \\
&= \lim_{s\to\infty}(-\log P^{\delta_x}\exp\{-\langle X_{t+s},f\rangle\}) \\
&= \lim_{s\to\infty}(-\log P^{\delta_x}P^{X_t}\exp\{-\langle X_s,f\rangle\}) \quad (\text{Markov 性}) \\
&= \lim_{s\to\infty}(-\log P^{\delta_x}\exp\{-\langle X_t,V_sf\rangle\}) \\
&= -\log P^{\delta_x}\exp\{-\langle X_t,V_\infty f\rangle\} \\
&= V_t(V_\infty)f(x).
\end{aligned}
\tag{7.1.12}
$$

即 $V_\infty f$ 是半群 V_t 的不变函数. 再由鞅的收敛定理，易证存在 $X_\infty^l(f)$ 使得

$$
e^{-\langle X_t,f\rangle} \xrightarrow{\text{a.s.}} X_\infty^l(f).
$$

由此即知，$\langle X_t,f\rangle\xrightarrow{\text{a.s.}}X_\infty(f):=-\log X_\infty^l(f)$. □

引理 7.1.8 在引理 7.1.7 相同假设下，我们有二择一结论：要么 $V_\infty f\equiv 0$，要么 $V_\infty f(x)>0, x\in E$.

证明 首先，往证"如果存在 $x_0\in E$，使得 $V_\infty f(x_0)=0$，则 $\mathscr{L}$-a.e. $x\in E, V_\infty f(x)=0$". 采用反证法. 如果不是，由假设 7.1.6，我们有

$$
P^{\delta_{x_0}}\langle X_t,V_\infty f\rangle = S_tV_\infty f(x_0) > 0,
\tag{7.1.13}
$$

所以

$$e^{-V_\infty f(x_0)} = e^{-V_t(V_\infty f)(x_0)} \quad \text{(由引理 7.1.7)}$$
$$= P^{\delta_{x_0}} e^{-\langle X_t, V_\infty f\rangle} < 1. \qquad (7.1.14)$$

由此可以推出 $V_\infty f(x_0) > 0$，矛盾.

其次，往证"如果 $V_\infty f(x) = 0$，$\mathscr{L}$-a. e. $x \in E$，则 $V_\infty f \equiv 0$". 事实上，对于任一点 $x \in E$，由超过程的矩公式得，

$$P^{\delta_x}\langle X_t, V_\infty f\rangle = S_t(V_\infty f)(x) = 0.$$

这就意味着 P^{δ_x}-a. s. $\langle X_t, V_\infty f\rangle = 0$. 从而，

$$V_\infty f(x) = -\log P^{\delta_x} e^{-\langle X_t, V_\infty f\rangle} = 0.$$

证毕. □

注 7.1.9 从上面的证明中容易看出，对于更一般的 (ξ, ψ, κ)-超过程(定义见 §3.2)引理 7.1.7 及引理 7.1.8 仍然成立.

定理 7.1.10 假设 $f \in H$. 如果下列两条件之一满足：

(1) ξ 是常返的右过程，$\kappa(dt) = dt$ 及 $\mathscr{L}(\mathrm{supp}(\gamma)) > 0$;

(2) $\mathrm{supp}(\gamma)$ 包含至多有限个点. 对于每一个点 $x \in \mathrm{supp}(\gamma)$，$\xi$ 在点 x 的局部时 $L(t, x)$ 存在，且存在至少一点 $x \in \mathrm{supp}(\gamma)$ 使得 $L(s, x) \to \infty (s \to \infty)$. $\kappa_s := \sum_{x \in \mathrm{supp}(\gamma)} L(s, x)$，

则 $V_\infty f \equiv 0$，从而 $\langle X_t, f\rangle \xrightarrow{\text{a.s.}} 0 (t \to \infty)$.

证明 先证情况(1). 由于 $\mathscr{L}(\mathrm{supp}(\gamma)) > 0$，所以 $\mathrm{supp}(\gamma)$ 不是 ξ 的极集(polar set). 由 ξ 的常返性，则(参见文献[175], Ex. 10.39)

$$\int_0^\infty P_x \gamma(\xi_s) V_\infty^{1+\beta} f(\xi_s) ds = 0 \qquad (7.1.15)$$

或者

$$\int_0^\infty P_y \gamma(\xi_s) V_\infty^{1+\beta} f(\xi_s) ds = \infty. \qquad (7.1.16)$$

假定存在 x_0，$V_\infty f(x_0) > 0$，则由引理 7.1.8 知，$V_\infty f$ 在 E 上恒大于 0，从而 $\int_0^t P_x \gamma(\xi_s) V_\infty^{1+\beta} f(\xi_s) ds > 0$. 这就说明了

$$\int_0^\infty P_x \gamma(\xi_s) V_\infty^{1+\beta} f(\xi_s) ds \equiv \infty. \qquad (7.1.17)$$

由引理 7.1.7，

$$\int_0^t P_x\gamma(\xi_s)V_{t-s}^{1+\beta}f(\xi_s)ds \geqslant \int_0^t P_x\gamma(\xi_s)V_{\infty}^{1+\beta}f(\xi_s)ds,$$

(7.1.18)

所以

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t P_x\gamma(\xi_s)V_{t-s}^{1+\beta}f(\xi_s)ds = \infty. \qquad (7.1.19)$$

另一方面,存在 $x\in E$ 及所有的 $t>0$,

$$\int_0^t P_x\gamma(\xi_s)V_{t-s}^{1+\beta}f(\xi_s)ds \leqslant S_tf(x) \leqslant f(x) < \infty.$$

(7.1.20)

矛盾! 即 $V_\infty f\equiv 0$.

至于情况(2),同理可证对于使得 $L(s,x)\to\infty(s\to\infty)$ 的点 x, $V_\infty f(x)=0$. 因此,$V_\infty f\equiv 0$. 证毕. □

注 7.1.11 在文献[21,22]等中,称条件(2)中的 supp(γ)为"催化剂"(catalyst). 直观上,超过程在这些点上分枝的速度很快.

相应地,我们有

定理 7.1.12 假定 $f\in H$ 有界,存在 $x\in E$, $\lim_{t\to\infty}S_tf(x)>0$. 如果 $P_x\int_0^\infty \gamma(\xi_s)\kappa(ds)<\infty$,即 γ 相对于 ξ 和 κ 的位势有限,则 $V_\infty f(x)>0$, $x\in E$. 从而对于任意非零测度 $\mu\in M_F(E)$, $\langle X_t,f\rangle$ 不是 P^μ-a. s. 收敛到零.

证明 只需证明 $V_\infty f\not\equiv 0$. 假若不然,也就是 $V_\infty f\equiv 0$. 在定理条件下,那么对于任意 $\varepsilon>0$,我们可以找到充分大的 t_1 使得

$$P_x\int_{t_1}^\infty \gamma(\xi_s)\kappa(ds) < \varepsilon/\|f\|^{1+\beta}. \qquad (7.1.21)$$

即对于 $t>t_1$,

$$P_x\int_{t_1}^t \gamma(\xi_s)V_{t-s}^{1+\beta}f(\xi_s)\kappa(ds) < \varepsilon. \qquad (7.1.22)$$

又注意到,对于 $t>t_1$,

$$P_x\int_0^t \gamma(\xi_s)V_{t-s}^{1+\beta}f(\xi_s)\kappa(ds)$$

$$= P_x\int_0^{t_1}\gamma(\xi_s)V_{t-s}^{1+\beta}f(\xi_s)\kappa(ds)$$

$$+ P_x\int_{t_1}^{t}\gamma(\xi_s)V_{t-s}^{1+\beta}f(\xi_s)\kappa(ds). \qquad (7.1.23)$$

既然 $V_tf\downarrow 0$，由单调收敛定理推出

$$\lim_{t\to\infty}P_x\int_0^{t_1}\gamma(\xi_s)V_{t-s}^{1+\beta}f(\xi_s)\kappa(ds) = 0, \qquad (7.1.24)$$

因此，

$$\limsup_{t\to\infty}P_x\int_0^{t}\gamma(\xi_s)V_{t-s}^{1+\beta}f(\xi_s)\kappa(ds) < \varepsilon.$$

根据 ε 的任意性，对于任意 $x\in E$,

$$\lim_{t\to\infty}P_x\int_0^{t}\gamma(\xi_s)V_{t-s}^{1+\beta}f(\xi_s)\kappa(ds) = 0.$$

另一方面，由方程(7.1.6)及本定理的假设，存在 $x\in E$ 使得

$$\lim_{t\to\infty}P_x\int_0^{t}\gamma(\xi_s)V_{t-s}^{1+\beta}f(\xi_s)\kappa(ds) = \lim_{t\to\infty}S_tf(x) > 0, \qquad (7.1.25)$$

矛盾！这就意味着 $V_\infty f>0, x\in E$. 证毕. □

特别地，当 $f\equiv 1$ 时，上述定理为我们提供了判断超过程是否灭绝的一个准则，即

系 7.1.13 在定理 7.1.10 的条件下，超过程 X_t 灭绝；若

$$P_x\int_0^{\infty}\gamma(\xi_s)\kappa(ds) < \infty,$$

则超过程 X_t 不灭绝.

显然，上述正反两方面的结果仍存在较大的差距. 然而从直观上来讲，超过程的灭绝是由于粒子在分枝区域中逗留时间太长造成的，因此，最终的结果应该是

猜想 7.1.14 X_t 是灭绝的当且仅当

$$P_x\int_0^{\infty}\gamma(\xi_t)\kappa(dt) = \infty, \qquad (7.1.26)$$

即 γ 相对于 ξ 及 κ 的 0-阶位势是无限的.

注 7.1.15 当然，我们还可以给出测度值过程的灭绝性的不

同定义. 比如, 一个更强的定义为:"称 X_t(强)灭绝, 如果几乎所有的样本, 对于足够大的 t, 有 $\mathrm{supp}(X_t)=\varnothing$". 从注 7.1.5 知道, 在某些情况下这里的定义与前面的定义是一致的. 但一般地, 我们不能期望如此强的结果. 对此, 我们将在以后进行讨论(见定理 9.3.9).

§7.2 超过程的灭绝时

上节我们定义了超过程的灭绝时 T_e, 而且给出了 $S(\xi,\gamma,\beta)$ 灭绝时 T_e 的分布. 唐加山(1997)[187]研究了分枝特征更一般的超过程的灭绝时间. 其主要结论是

定理 7.2.1 (i)若 $\Psi(z)=bz+\gamma z^{1+\beta}(b\geqslant 0,\gamma>0,0<\beta\leqslant 1)$, 则

$$P^{\mu}(T_e\leqslant t)=\begin{cases}\exp(-\mu(E)(\beta\gamma t)^{-1/\beta}), & b=0;\\ \exp\left(-\mu(E)e^{-bt}\left(\dfrac{\gamma}{b}(1-e^{-b\beta t})\right)^{-1/\beta}\right), & b>0.\end{cases} \tag{7.2.1}$$

(ii)若 $\Psi(z)=cz^2+\gamma z^{\frac{2n+1}{n+1}}(c>0,\gamma>0,n\geqslant 1)$, 则

$$P^{\mu}(T_e\leqslant t)=\exp(-\mu(E)g(t)), \tag{7.2.2}$$

其中 $g(t)$ 是下面 $\tilde{g}=\tilde{g}(t)$ 的逆函数.

$$\tilde{g}(t):=\frac{n+1}{\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n-k}\binom{n}{n-k}\left(-\frac{c}{\gamma}\right)^k\left(\frac{c}{\gamma}+\frac{1}{t^{1/n+1}}\right)^{n-k}$$
$$+\left(-\frac{c}{\gamma}\right)^n\ln\left(\frac{1}{t^{1/n+1}}+\frac{c}{\gamma}\right). \tag{7.2.3}$$

证明 先证(i). $b=0$ 的情形已证, 考虑 $b>0$ 的情况, 首先, 方程

$$V_t+\int_0^t S_s(bV_{t-s}+\gamma V_{t-s}^{1+\beta})ds=n, n>0 \tag{7.2.4}$$

的唯一解为

$$V_t^n=e^{-bt}\left(\frac{\gamma}{b}(1-e^{-b\beta t})+n^{-\beta}\right)^{-1/\beta}. \tag{7.2.5}$$

由此和定理 7.1.4 相同的讨论，即可证(7.2.1).

往证(ii)，考虑

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) = Au(t,x) - cu^2(t,x) - \gamma u^{\frac{2n+1}{n+1}}(t,x), \\
u(0,x) = \theta.
\end{cases}
\tag{7.2.6}
$$

为此，先来研究方程

$$
\frac{d}{dt}v(t) = -cv^2(t) - \gamma v^{\frac{2n+1}{n+1}}(t),\ v(0) = \theta.
$$

令 $w=(1/v)^{1/(n+1)}$，经简单计算上述微分方程则化为

$$
\frac{w^n}{w + \dfrac{c}{\gamma}}dw = \frac{\gamma}{n+1}dt.
$$

由此易得

$$
\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k}\binom{n}{n-k}\left(-\frac{c}{\gamma}\right)^k\left(\frac{c}{\gamma} + \frac{1}{v^{1/n+1}}\right)^{n-k}
+ \left(-\frac{c}{\gamma}\right)^n \ln\left(\frac{1}{v^{1/n+1}} + \frac{c}{\gamma}\right) = \frac{\gamma t}{n+1} + c.
$$

代入初值条件 $v(0)=\theta$，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k}\binom{n}{n-k}\left(-\frac{c}{\gamma}\right)^k\left(\frac{c}{\gamma} + \frac{1}{v^{1/n+1}}\right)^{n-k} \\
&\qquad + \left(-\frac{c}{\gamma}\right)^n \ln\left(\frac{1}{v^{1/n+1}} + \frac{c}{\gamma}\right) \\
&= \frac{\gamma}{n+1}t + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k}\binom{n}{n-k}\left(-\frac{c}{\gamma}\right)^k\left(\frac{c}{\gamma} + \frac{1}{\theta^{1/n+1}}\right)^{n-k} \\
&\qquad + \left(-\frac{c}{\gamma}\right)^n \ln\left(\frac{1}{\theta^{1/n+1}} + \frac{c}{\gamma}\right).
\end{aligned}
\tag{7.2.7}
$$

由方程(7.2.6)解的唯一性，则 $u(t,x,\theta)=v(t,\theta):=v(t)$ 是(7.2.6)的唯一解. 考虑(7.2.3)给出的 $\tilde{g}$，容易验证$(0)=\infty$，$\tilde{g}(\infty)=0$，而且$\tilde{g}(t)$在$(0,\infty)$上严格单减. 同(i)相同的讨论，并注意到 $\lim_{\theta\to\infty}u(t,x,\theta)=g(t)$为 $\tilde{g}$ 的逆函数可得所要结论. □

注 7.2.2 在计算中若用不同的变量替换，则定理的结论会

看起来不一样. 比如，这里的表达式与唐加山在[187]中给出的不同，但实际上是一致的. 定理 7.2.1(ii)有不少拼凑成分，结论也略显复杂，但它确实提供了一种推广有关结论的想法.

至于超过程灭绝时的矩，我们有

定理 7.2.3

(i)若 $\Psi(z)=\gamma z^{1+\beta}(\gamma>0,0<\beta\leqslant 1)$，则当且仅当 $\beta m<1$ 时，$P^{\mu}T_e^m<\infty$，且

$$P^{\mu}T_e^m=\left(\frac{\mu(E)^{\beta}}{\beta\gamma}\right)^m\Gamma(1-\beta m), \tag{7.2.8}$$

这里 Γ 为 Gamma 函数.

(ii)若 $\Psi(z)=bz+\gamma z^{1+\beta}(b>0,\gamma>0,0<\beta\leqslant 1)$，则对 $\forall\ m\geqslant 1$ 有 $P^{\mu}T_e^m<\infty$.

证明 先证(i). 当 $\Psi(z)=\gamma z^{1+\beta}$ 时，由(7.2.1)，

$$\begin{aligned}P^{\mu}T_e^m&=\frac{1}{\beta}\mu(E)(\beta\gamma)^{-1/\beta}\int_0^{\infty}t^{m-1-1/\beta}\exp(-\mu(E)(\beta\gamma t)^{-1/\beta})\,dt\\&=\mu(E)(\beta\gamma)^{-1/\beta}\int_0^{\infty}s^{-\beta m}\exp(-\mu(E)(\beta\gamma)^{-1/\beta}s)\,ds\\&=\left(\frac{\mu(E)^{\beta}}{\beta\gamma}\right)^m\int_0^{\infty}v^{-\beta m}e^{-v}dv\\&=\left(\frac{\mu(E)^{\beta}}{\beta\gamma}\right)^m\Gamma(1-\beta m),\end{aligned}$$

其中第二个和第三个等号是分别作变量替换 $t=s^{-\beta}$ 和 $s=\frac{(\beta\gamma)^{1/\beta}}{\mu(E)}v$ 得到的. 显然，当且仅当 $\beta m<1$ 时，$P^{\mu}T_e^m<\infty$.

至于(ii)，再由(7.2.1)，对 $m\geqslant 1$，

$$\begin{aligned}P^{\mu}T_e^m&=\int_0^{\infty}t^m dP^{\mu}(T_e\leqslant t)\\&=\mu(E)\int_0^{\infty}t^m e^{-\mu(E)s(t)}[bs(t)+\gamma s(t)^{1+\beta}]dt,\end{aligned}$$

其中 $s(t)=e^{-bt}\left(\frac{\gamma}{b}(1-e^{-b\beta t})\right)^{-1/\beta}$. 由此易知，上述积分可积. □

从上面的讨论可以看出，超过程的每个参数都对超过程的性质有影响. 参数之间的联合作用一直是学者们关心的热点问题之

…. 从某种角度来说，分枝特征影响着超过程时间和整体方面的性质，而底过程则影响超过程空间和位置方面的性质. 本节的结论进一步说明分枝特征对超过程的灭绝时有着重要的影响. 例如从定理 7.2.3 可以看出当分枝特征为 $\Psi(z)=\gamma z^{1+\beta}$时，$\beta$ 是否为 1 直接关系到灭绝时的一阶矩是否存在，而且 $\Psi(z)=bz+\gamma z^{1+\beta}$中的 b 是否为 0 也对灭绝时的矩性质有着深刻影响.

§7.3 超 Brown 运动灭绝点的分布

本节我们针对超 Brown 运动，考虑其灭绝点的分布. 设 $\{X_t, P^\mu\}_{\mu\in M_F(R^d)}$ 是 $M_F(R^d)$ 上分枝特征为 $\Psi(z)=2z^2$ 的超 Brown 运动. 考虑这种分枝特征的主要原因是我们希望直接采用第五章 Le Gall 的 Brown 蛇构造方法. 对于分枝速率为一般常数的超 Brown 运动，可以经适当的时间与空间变换化为分枝特征为 $\Psi(z)=2z^2$ 的情形. 具体作法留给读者.

我们知道这种分枝特征的超 Brown 运动是灭绝的. Tribe (1992)[191]还证明了 X_t 在即将灭绝时几乎所有地剩下单点. 我们称之为**灭绝点**. 事实上，采用 Le Gall 的 Brown 蛇构造方法，我们也可以证明上述结论，当然不是轻易而举的. 限于篇幅，我们不关心该结果的证明，而只关心灭绝点的分布. 我们有

定理 7.3.1 设 $x_e=\mathrm{supp}(X_{T_e-})$，则

$$P^{\delta_z}(x_e\in dy)=\int_0^\infty 2\left(\frac{t}{\pi}\right)^{d/2}\exp(-((y-z)^2+2)t)\,dt\,dy. \tag{7.3.1}$$

该定理的证明是基于 Le Gall 的构造，因此有关记号请参照第五章. 先看两个引理：

引理 7.3.2 设 η 是直线上 Brown 运动的局部时过程首达 1 的时间(见(5.0.3))，则有

$$\mathscr{R}(\eta\in du)=\frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}}\exp\left(-\frac{1}{2u}\right)du. \tag{7.3.2}$$

证明 由于 $\mathscr{R}(\eta > u) = \mathscr{R}(L_u^0 < 1)$. 因而，由文献[105]，p. 420之结论，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{R}(\eta > u) &= \mathscr{R}(L_u^0 < 1) \\
&= \int_0^1 \int_0^\infty \frac{2(a+b)}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp\left(-\frac{(a+b)^2}{2u}\right) dadb \\
&= \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{2\pi u}} \exp\left(-\frac{b^2}{2u}\right) db \\
&= \int_u^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(-\frac{1}{2s}\right) ds.
\end{aligned}
$$

故引理得证. □

对固定的 $\overline{w}$，定义 $h = h(\overline{w})$ 如下

$$
h(\overline{w}) := \sup_{1 \leqslant u \leqslant \eta} \overline{w}(u).
$$

我们有

引理 7.3.3

$$
P^{\delta_z}(T_\varepsilon < t) = \mathscr{R}(h(\overline{w}) < t) = \exp(-\mu(E)(2\beta t)^{-1/\beta}). \tag{7.3.3}
$$

证明 由(7.2.1)及超 Brown 运动的轨道构造可知本命题成立. □

定理 7.3.1 的证明：由 Le Gall 关于超 Brown 运动的轨道构造知道，x_ε 的分布是和 $x_\varepsilon(\overline{w}, w) = w(s_{\overline{w}})$ 同分布的，其中 $s_{\overline{w}} \in (0, \eta)$ 满足 $\overline{w}(s_{\overline{w}}) = h(\overline{w})$. 当 $\overline{w}$ 固定时，有

$$
Q^{\overline{w}}(w(s_{\overline{w}}) \in dx) = \frac{1}{(2\pi h(\overline{w}))^{d/2}} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{2h(\overline{w})}\right) dx.
$$

因而由引理 7.3.3，我们有

$$
\begin{aligned}
& P^{\delta_z}(x_\varepsilon \in dx) \\
&= \int \mathscr{R}(d\overline{w}) Q^{\overline{w}}(w(s_{\overline{w}}) \in dx) \\
&= \int_0^\infty \mathscr{R}(\overline{w} : h(\overline{w}) \in dt) \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{2t}\right) dx \\
&= \int_0^\infty 2\left(\frac{t}{\pi}\right)^{d/2} \exp(-((x-z)^2 + 2)t) dt dx.
\end{aligned}
$$

证毕. □

§7.4 缓增测度值超过程的局部灭绝性

当然,对于从无穷测度值出发的超过程我们也可以讨论其灭绝性问题.然而初始测度的无穷使得上节的方法及灭绝的意义变得无效,必须在新的含义下进行讨论.

称 $M_p(\mathbb{R}^d)$上的超稳定过程$(X_t,t\geqslant 0,P^\mu)_{\mu\in M_p(\mathbb{R}^d)}$是"**局部灭绝性**",如果对于任意$\mathbb{R}^d$ 中的有界开集 G,当 $t\to\infty$时,$X_t(G)$以概率收敛到 0.等价地,对于任意紧集 F,当 $t\to\infty$时,$X_t(F)$以概率收敛到 0.

为研究这样的问题,我们首先需要确定所研究的超过程及其初始测度.为了简单起见,本节仅考虑超 α-对称稳定过程($1<\alpha\leqslant 2$),其分枝特征为 $\Psi(x,\lambda)=\gamma(x)\lambda^{1+\beta}(0<\beta\leqslant 1)$,其中 γ 为非负可测函数.

当 γ 有界时,前面已经构造了相应的超过程.但当 γ 无界时,情况比较复杂. Fleischmann-Mueller(1997)[75]讨论了分枝速率为局部无限的超 Brown 运动.由于比较定理对拉普拉斯算子△成立,这就使得我们可以把相应的超 Brown 运动看成分枝速率为 $n\wedge\gamma$ 的超过程的极限.具体做法留给读者.但对于一般的底过程,我们不知道有关结果是否成立.无论如何,

假设 7.4.1 $\gamma\in b\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$,使得分枝机制为 $\Psi(x,\lambda)=\gamma(x)\lambda^{1+\beta}$的超过程存在,而且对于$\forall\ \phi\in pbC(\mathbb{R}^d)$,方程

$$v_t(x)+\int_0^t S_{t-s}\gamma(x)V_s^{1+\beta}(x)ds=S_t\phi(x)$$

存在唯一有界非负解.

记 $\mathscr{L}$ 为$\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度.

定理 7.4.2 设$(X_t,t\geqslant 0)$是分枝特征为 $\gamma(x)\lambda^{1+\beta}(0<\beta\leqslant 1)$的超对称稳定过程,$\gamma$ 满足假设 7.4.1.令 $B_t^k:=\{x\in\mathbb{R}^d;|x|^\alpha\leqslant k(t+1)\}$,$k\in\mathbb{N}$.若 $\gamma>0$ 且对于任意固定的 $k\in\mathbb{N}$,

$$\int_0^\infty ds\left(\int_{B_s^k}\gamma(x)^{-1/\beta}ds\right)^{-\beta}=\infty, \qquad (7.4.1)$$

则以 $\mathscr{L}$ 为初始测度的超过程 X_t 是局部灭绝的.

证明 事实上,只需证明:若

$$v(t,x)=S_t\phi(x)-\int_0^t S_s(\gamma v^{1+\beta}(t-s,x))ds, \qquad (7.4.2)$$

而 $\phi(x):=p_1(x)=p(1,x)$,对称稳定过程的转移函数,则有

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}v(t,x)dx=0 \qquad (7.4.3)$$

即可. 令 $\|v(t)\|_1:=\int_{\mathbb{R}^d}v(t,x)dx$. 取 $A_t^k:=\mathbb{R}^d\setminus B_t^k$. 由(7.4.2)知,对 $\forall\, t>0$,

$$\int_{A_t^k}dxv(t,x)\leqslant\int_{A_t^k}dxS_tp_1(x)$$

$$=\int_{A_t^k}dxp_{1+t}(x)=\int_{|x|^a>k}dxp_1(x). \qquad (7.4.4)$$

另一方面,(7.4.2)告诉我们,

$$\|v(t)\|_1=1-\int_0^t ds\|\gamma v^{1+\beta}(s)\|_1. \qquad (7.4.5)$$

从而,

$$1\geqslant\int_0^t ds\int_{B_s^k}ds\gamma(x)v^{1+\beta}(s,x)dx$$

$$\geqslant\int_0^t ds\left(\int_{B_s^k}\gamma(x)^{-1/\beta}dx\right)^{-\beta}g^{1+\beta}(s),$$

其中 $g(s):=\int_{B_s^k}dxv(s,x)$. 由假设(7.4.1)知,$\inf\{g(s):s\geqslant 0\}=0$. 又由于 g 是正数,所以 $\liminf_{s\to\infty}g(s)=0$. 综上所述,我们有

$$\liminf_{t\to\infty}\|v(t)\|_1=\liminf_{t\to\infty}\int_{A_t^k}v(t,x)dx$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_{|x|^a>k}dxp_1(x)=0.$$

由(7.4.5)易知,$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_1=-\|\gamma v^{1+\beta}(t)\|_1\leqslant 0$. 所以 $\|v(t)\|_1$ 单调下降,从而(7.4.3)得证. □

系 7.4.3 设$(X_t, t \geqslant 0)$是分枝速率γ为常数的超α-对称稳定过程，则当$d \leqslant \alpha/\beta$时，对于任何的紧集$F \subset \mathbb{R}^d$及$\varepsilon > 0$，

$$\lim_{t \to \infty} P^{\mathscr{L}}(X_t(F) > \varepsilon) = 0. \qquad (7.4.6)$$

证明 由于

$$\int_0^\infty ds |B_s^t|^{-\beta} = \text{const} \int_0^\infty ds (s+1)^{-\beta d/\alpha} = \infty,$$

其中$|B|$表示球B的体积. 因此定理 7.4.2 中的条件(7.4.1)满足. □

注 7.4.4 Dawson(1977)[17]证明了系 7.4.3 中$\beta = 1$的情况. 系 7.4.3 是 Dawson-Fleischmann-Foley-Peletier(1986)在[23]中的一个主要结果. 在定理 7.4.2 中，γ的假设依赖于集合B_t的选择，因此该假设是否为最好的，仍是值得进一步研究的问题.

上面仅讨论了初始测度是 Lebesgue 测度的情况，限制太多. 为了推广上述结果，我们先证如下

引理 7.4.5 令

$$M_I(\mathbb{R}^d) := \left\{ \mu \in M_p(\mathbb{R}^d), \sup_{A_k} \frac{\mu(A)}{\mathscr{L}(A)} < \infty \right\},$$

其中A_k表示中心在原点，边长为k的方体.

(a)给定$\mu \in M_1(\mathbb{R}^1)$，存在常数$c > 0$使得对于任何$[0, \infty)$上的单调下降函数$f(x) \geqslant 0$，$f$在$[0,1]$上是常数，我们有

$$\int_0^t f(x) \mu(dx) \leqslant c \int_0^t f(x) \mathscr{L}(dx), t \geqslant 1.$$

(b)给定$\mu \in M_I(\mathbb{R}^d)$，存在常数$c > 0$使得对于任何球对称函数$f(x) \geqslant 0$，径向单调下降且在$[0,1]$上是常数，我们有

$$\int_{\|x\| \leqslant t} f(x) \mu(dx) \leqslant c \int_{\|x\| \leqslant t} f(x) \mathscr{L}(dx), t \geqslant 1.$$

证明 (a)令$F(t) := \int_0^t \mu(dx)$. 由假设知$\sup_{x \geqslant 1} F(x)/x < \infty$. 因而存在常数$c > 0$使得$F(x) \leqslant cx, x \geqslant 1$. 所以，对于$t \geqslant 1$，

$$\int_0^t f(x) \mu(dx) = F(t) f(t) - \int_0^t F(x) df(x)$$

$$\leqslant F(t)f(t) - c\int_0^t x df(x)$$

$$= F(x)f(t) - ctf(t) - cf(1) + c\int_0^t f(x)\mathscr{L}(x)$$

$$\leqslant \int_0^t f(x)\mathscr{L}(dx).$$

同理可证(b). □

系 7.4.6 在定理 7.4.2 相同的假设下，则于 $\mu \in M_I, X_t$ 在 P^μ 之下也是局部灭绝的.

证明 如定理 7.4.2 之证明，我们要证

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} v(t,x)\mu(dx) = 0.$$

一方面，易知$\lim_{t\to\infty}\int_{A_t^c} v(t,x)\mu(dx) = 0$. 另一方面，对于任何常数 $K'>0$，

$$\int_{\|x\|\leqslant K'} v(t,x)\mu(x) \to 0 \quad 当\ t\to\infty. \tag{7.4.7}$$

于是，由引理 7.4.5，知$\lim_{t\to\infty}\int_{A_t} v(t,x)\mu(dx) = 0$ 的证明可归结为

$$\lim_{t\to\infty}\int_{A_t} v(t,x)\mathscr{L}(dx) = 0.$$

证毕. □

注 7.4.7 设 γ 为常数，系 7.4.3 实际上意味着若 $d\leqslant\alpha/\beta, X_t$ 不存在非平凡的稳定随机测度. 即若 $\mathscr{N}$ 为 $M_p(\mathbb{R}^d)$上的随机测度，使得

$$\int_{M_p(\mathbb{R}^d)} \mathscr{N}(d\nu)\mathscr{P}(t,\nu,d\mu) = \mathscr{N}(d\mu), t\geqslant 0,$$

其中 $\mathscr{P}(t,\nu,d\mu)$ 为超过程的转移函数. 则 $\mathscr{N}$ 为零测度的 Kronecker 点测度，即 $\mathscr{N}=\delta_0$. 其证明详见文献[18].

文献评注：§7.1 主要取材于文献[230]，[233]. §7.2、§7.3 中的结果取材于[187]，但证明略有改变. §7.4 的内容参考了[17]和[23]，但主要定理 7.4.2 是作者一个待发表的结果. 灭绝性的相关研究很多，如[191]和[199]等.

第八章　超对称稳定过程占位时的渐近行为

我们知道，取值于$\mathbb{R}^d$中的α-稳定过程是空间齐次过程，其转移概率密度为$p_\alpha(t;x,y)=p_\alpha(t,y-x)$. 考虑$M_p(\mathbb{R}^d)=\{\mu:\mu$是$(\mathbb{R}^d,\mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$上的测度，$\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{(1+|x|)^p}\mu(dx)<\infty\}$，并在其上赋予淡收敛拓扑.

考虑取值于$M_p(\mathbb{R}^d)$，分枝机制$\Psi(x,z)=\gamma(x)z^{1+\beta}$，$0<\beta\leqslant 1$之超$\alpha$-对称稳定过程$X=\{X_t,t\geqslant 0\}$. 在本章，恒设$0<\alpha\leqslant 2$，$0<\beta\leqslant 1$，$d<p<d+\alpha$，而且$0\leqslant\gamma\leqslant C$（正常数）是$\mathbb{R}^d$上的可测函数. 下面将研究超对称稳定过程占位时过程的渐近性质.

考虑定义在缓增空间$M_p(\mathbb{R}^d)$上的超α-对称稳定过程的占位时过程Y_t. 由定理 4.4.2，其 Laplace 泛函为

$$P^\mu\exp\{-\langle Y_t,\phi\rangle\}=\exp\{-\langle\mu,U_t\phi\rangle\},\mu\in M_p(\mathbb{R}^d) \tag{8.0.1}$$

而$U_t\phi$满足

$$U_t\phi(x)+\int_0^t S_{t-s}(\gamma(x)(U_s\phi(x))^{1+\beta}ds=\int_0^t S_s\phi(x)ds, \tag{8.0.2}$$

$\forall\ \phi\in C_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}_+)$.

我们将考虑$d>\alpha/\beta$，$d<\alpha/\beta$和$d=\alpha/\beta$三种情况，旨在揭示超过程的渐近性质与空间维数、分枝特征(γ,β)、底过程(α)之间的关系.

§8.1　几个估计式

$C_0(\mathbb{R}^d):=\{\phi;\phi$是$\mathbb{R}^d$上连续函数且在无穷远点的极限为$0\}$，

其上赋最大模范数 $\|\cdot\|$. $pC_p(\mathbb{R}^d)=\{\phi;\phi$ 是$\mathbb{R}^d$ 上非负有界连续函数且 $|x|^p\phi(x)$ 有界$\}$. 易知 $pC_p(\mathbb{R}^d)\subset C_0(\mathbb{R}^d)$. 根据(8.0.2)易证,对于固定的 $\phi\in pC_p(\mathbb{R}^d)$, $t\mapsto u_t:=U_t\phi$ 是$\mathbb{R}_+\to C_0(\mathbb{R}^d)$的连续映射.

设 $1\leqslant\chi\leqslant 1+\alpha/d$,给定 $T>0$,我们引入 Banach 空间:

$B^{\chi,T}=C([0,T];L^\chi)=\{v:[0,T]\to L^\chi=L^\chi(\mathbb{R}^d,dx)$,且连续$\}$

L^χ 上赋以范数 $\|\cdot\|_\chi$. 在 $B^{\chi,T}$中定义范数 $|||v|||_{\chi,T}=\sup\{\|v\|_\chi: t\in[0,T]\}$. 记 $M^f=\{\mu:(\mathbb{R}^d,\mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$上有限符号测度$\}$. 设 $\mu\in M^f$,对于 $t\geqslant 0,x\in\mathbb{R}^d$,定义

$$w(t,x):=\int_0^t ds p_\alpha(s,x), \tag{8.1.1}$$

$$\mu S_t(x)=\int p_\alpha(t,y,x)\mu(dy), \tag{8.1.2}$$

$$w_\mu(t,x)=\int w(t,x-y)\mu(dy)=\int_0^t \mu S_s(x)ds. \tag{8.1.3}$$

首先我们有:

引理 8.1.1 设 $\mu\in M_F(\mathbb{R}^d)$,则

(1) $w\in pB^{\chi,T}$,且 $|||w|||_{\chi,T}\to 0(T\to 0)$.

(2) $w_\mu\in B^{\chi,T}$,且 $|||w_\mu|||_{\chi,T}\leqslant\|\mu\|^\chi\times|||w|||_{\chi,T}<\infty$(其中 $\|\mu\|=\mu(\mathbb{R}^d)$).

(3)设 $\varepsilon>0$,

$$\int_{|x|<\varepsilon}|w_\mu(t,x)|^\chi dx\leqslant\|\mu\|^\chi\int_{|x|<\varepsilon}w^\chi(t,x)dx\to 0(\varepsilon\to 0).$$

(4)对于 $K>L>0$,

$$\int_{|x|>K}|w_\mu(t,x)|^\chi dx\leqslant\|\mu\|^{\chi-1}\mu(|y|>L)|||w|||_{\chi,T}^\chi$$
$$+\|\mu\|^\chi\int_{|x|>K-L}w^\chi(t,x)dx.$$

证明 先证(1). 存在 θ 使得 $0<\theta<1$ 和 $(d/\alpha-\theta)(\chi-1)<1$. 由引理 1.9.1 即知所证结论成立.

下面往证(2). 对于 Borel 子集 Z 及 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 考虑

$$\int_Z dx\,|w_\mu(t,x) - w_\mu(s,x)|^\chi$$

$$\leqslant \int_Z dx\Big(\int \mu(dy)\,|w(t,x-y) - w(s,x-y)|\Big)^\chi$$

$$\leqslant \mu(\mathbb{R}^d)^{\chi-1}\int \mu(dy)\int_Z dx\,|w(t,x-y) - w(s,x-y)|^\chi$$

(由 Jensen 不等式).

取 $Z=\mathbb{R}^d$ 及 $s=0$ 即证(2).

至于(3),在上面估计中取 $Z=\{|x|<\varepsilon\}$ 和 $s=0$. 注意到 $\int_{|x|<\varepsilon} dx w^\chi(t,x-y)$ 当 $y=0$ 时取最大值,就得到所需结果.

最后,取 $Z=\{|x|>K\}$ 即得(4). □

我们还需要下面的连续性质:

引理 8.1.2

(5)映射 $w_\mu: M_F \to pB^{\chi,T}$ 连续.

(6)若 $\beta=\alpha/d$,则对任意 Borel 集 $B\subset[0,T]$ 和任意 $\mu\in M_F(\mathbb{R}^d)$,有

$$\int_B \|T_t w_\mu^\beta(T)\|\,dt \leqslant \|\mu\|^\beta \int_B\Big(\int_0^T p_\alpha(t+s,0)ds\Big)^\beta dt < \infty.$$

证明 先证(5). 在 $M_F(\mathbb{R}^d)$ 中取 $\mu_n\to\mu$ 并令 $\nu_n:=\mu_n-\mu$. 我们要证

$$|||w_{\mu_n} - w_\mu||| = \sup_{t\leqslant T}\|w_{\nu_n}(t)\|_\chi \to 0(n\to\infty).$$

由于 $\|w_\nu u\|_{\chi,T}\leqslant\|w_{|\nu u|}\|_{\chi,T}$($|\nu|$ 表示 ν 的绝对变差测度),所以根据(2),只需证明对 $\varepsilon>0$.

$$\sup_{\varepsilon\leqslant t\leqslant T}\|w_{\nu_n}(t) - w_{\nu_n}(\varepsilon)\|_\chi^\chi \to 0(n\to\infty).$$

再根据(3)和(4),对于任意 $0<\varepsilon<K$,考虑

$$\sup_{\varepsilon\leqslant t\leqslant T}\int_{|x|<K} dx\,|w_{\nu_n}(t,x) - w_{\nu_n}(\varepsilon,x)|^\chi$$

$$\leqslant \int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant L} dx\Big(\int_\varepsilon^T ds\,\Big|\int \nu_n(dy)p_\alpha(s,x-y)\Big|\Big)^\chi$$

$$\leqslant \text{const}\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant L} dx\int_\varepsilon^T ds\,\Big|\int \nu_n(dy)p_\alpha(s,x-y)\Big|^\chi$$

（由 Jensen 不等式）.

注意到 $p_\alpha(s,\cdot)$是有界连续的，所以由控制收敛定理结论(5)即可得证.

往证(6). 考虑

$$S_t w_\mu^\beta(T)(x)=\int dy p_\alpha(t,x,y)w_\mu^\beta(T,y)$$

$$\leqslant\left(\int dy p_\alpha(t,x-y)\int\mu(dz)\int_0^T ds p_\alpha(s,z-y)\right)^\beta$$

由（Jensen 不等式，并注意到 $0<\beta\leqslant 1$）

$$\leqslant\left(\int_0^T ds p_\alpha(t+s,0)\|\mu\|\right)^\beta$$

由（Chapman-Kolmogorov 方程）

$$\leqslant \text{const}\|\mu\|^\beta\left(\int_0^T ds(t+s)^{-d/\alpha}\right)^\beta \quad （由(1.9.7)）.$$

若 $d=\alpha$ 即 $\beta=1$，则结果由 $\int_0^T dt\int_0^T ds(t+s)^{-1}<\infty$ 即证. 若 $d\neq\alpha$ 我们有

$$\int_0^T dt\left(\int_0^T ds(t+s)^{-d/\alpha}\right)^\beta\leqslant \text{const}\int_0^T t^{\beta-1}dt<\infty.$$

证毕. □

§ 8.2 情形 1:$d>\alpha/\beta$

现在我们简记 $\mathscr{L}(dx)=dx$. 本节证明如下定理

定理 8.2.1 若 $d>\alpha/\beta$，Y_t 是以 $\lambda\mathscr{L}$ 为初始测度的超对称稳定过程的占伴时过程，则 $P^{\lambda\mathscr{L}}$-a. s. $\frac{Y_t}{t}\xrightarrow{v}\lambda dx(t\to\infty)$.

为此，需要一些预备结果. 事实上，由 $pC_c(\mathbb{R}^d)$（具有紧支撑的非负连续函数全体）的可分性，只要证对一个给定的 $\phi\in pC_c(\mathbb{R}^d)$，$\xi_t:=t^{-1}\langle\phi,Y_t\rangle\xrightarrow{\text{a.s.}}\lambda\|\phi\|_1(t\to\infty)$. 这里 $\|\cdot\|_1$ 是 $L^1(\mathbb{R}^d,dx)$中的范数. 不失一般性，假设 $\|\phi\|_1=1$. 换言之，我们需证 $\xi_t\xrightarrow{\text{a.s.}}\lambda(t\to\infty)$.

考察

$$P^{\lambda\mathscr{L}}e^{-\theta\xi_t}=e^{-\lambda\|u_t(t)\|_1},\theta\geqslant 0,\tag{8.2.1}$$

其中 $u_t(s)$ 是下面积分方程的非负解

$$u_t(s)=\int_0^s drS_r[\theta t^{-1}\phi]-\int_0^s drS_{s-r}[\gamma u_t^{1+\beta}(r)],s\geqslant 0.\tag{8.2.2}$$

关于方程(8.2.2)的解 $u_t(s)$，有

引理 8.2.2 若 $d>\alpha/\beta$，则存在 $\varepsilon>0$，使 $\|u_t(t)\|_1\geqslant\theta-C\theta^{1+\beta}t^{-\varepsilon},t\geqslant 0,\theta\geqslant 0$.

证明 由(8.2.2)，注意到 Lebesgue 测度是 α-对称稳定过程的不变测度，

$$\|u_t(t)\|_1=\theta-\int_0^t ds\|\gamma u_t^{1+\beta}(s)\|_1\geqslant\theta-C\int_0^t ds\|u_t^{1+\beta}(s)\|_1,\tag{8.2.3}$$

其中 C 为 γ 的上界. 因为当 $s\leqslant t$ 时，

$$0\leqslant u_t(s)\leqslant\int_0^s drS_r(\theta t^{-1}\phi)\leqslant\int_0^t drS_r(\theta t^{-1}\phi),$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^t ds\|u_t^{1+\beta}(s)\|_1&\leqslant\int_0^t ds\left\|\left(\int_0^t drS_r(\theta t^{-1}\phi)\right)^{1+\beta}\right\|_1\\&=t(\theta t^{-1})^{1+\beta}\left\|\left(\int_0^t drS_r\phi\right)^{1+\beta}\right\|_1\\&=\theta^{1+\beta}t^{-\beta}\left\|\left(\int_0^t drS_r\phi\right)^{1+\beta}\right\|_1.\end{aligned}$$

将上式代入(8.2.3)，

$$\|u_t(t)\|_1\geqslant\theta-C\theta^{1+\beta}t^{-\beta}\left\|\left(\int_0^t drS_r\phi\right)^{1+\beta}\right\|_1.\tag{8.2.4}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\left\|\left(\int_0^t drS_r\phi\right)^{1+\beta}\right\|_1&=\|w_{\lambda\mathscr{L}}(t)\|_{1+\beta}^{1+\beta}\\&\leqslant 2^\beta(\|w_{\lambda\mathscr{L}}(1)\|_{1+\beta}^{1+\beta}+\|w_{\lambda\mathscr{L}}(t)\end{aligned}$$

$$- w_{\lambda\mathscr{L}}(1) \|_{1+\beta}^{1+\beta}),$$

而

$$\| w_{\lambda\mathscr{L}}(1) \|_{1+\beta}^{1+\beta} \leqslant \| w_{\lambda\mathscr{L}}(1) \|^{\beta} \| w_{\lambda\mathscr{L}}(1) \|_{1} \leqslant \| w_{\lambda\mathscr{L}}(1) \|^{\beta} < \infty.$$

因为 $d>\alpha/\beta$,我们可选取 $a>0$ 使得 $(d/\alpha-a)\beta>1$,于是由引理 1.9.1,

$$\| w_{\lambda\mathscr{L}}(t) - w_{\lambda\mathscr{L}}(1) \|_{1+\beta}^{1+\beta} \leqslant \| w(t) - w(1) \|_{1+\beta}^{1+\beta}$$
$$\leqslant \mathrm{const}\, t^{(1-a)\beta}.$$

综上所述,

$$t^{-\beta} \left\| \left(\int_0^t dr S_r \phi \right)^{1+\beta} \right\|_1 \leqslant \mathrm{const}\, t^{-a\beta}. \tag{8.2.5}$$

从而证明了引理. □

引理 8.2.3 若 $d>\alpha/\beta$,则存在 $\delta>0$,使 $P^{\lambda\mathscr{L}}|\xi_t-\lambda| \leqslant Ct^{-\delta}$, $(t>1)$.

证明 由于 $P^{\lambda\mathscr{L}}\xi_t \equiv \lambda$,对于所有的 $\theta>0$,我们有

$$P^{\lambda\mathscr{L}}|\xi_t - \lambda| = 2P^{\lambda\mathscr{L}}(\xi - \lambda)^- = 2\int_0^\infty ds P^{\lambda\mathscr{L}}(-(\xi_t - \lambda) > s)$$
$$\leqslant 2\int_0^\infty ds e^{-\theta s} P^{\lambda\mathscr{L}} \exp(-\theta(\xi_t - \lambda))$$
$$= 2\theta^{-1} e^{\theta\lambda} P^{\lambda\mathscr{L}} \exp(-\theta\xi_t)$$
$$\leqslant 2\theta^{-1} \exp(C\theta^{1+\beta} t^{-\varepsilon}) (\text{由} (8.2.1) \text{ 和引理 } 8.2.2).$$

再令 $\theta = t^{\varepsilon/(1+\beta)}$,即得所要结果. □

定理 8.2.1 的证明 取 $0<c<1$ 和 $t_n = c^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. 由引理 8.2.3,

$$\sum_n P^{\lambda\mathscr{L}} |\xi_{t_n} - \lambda| < \infty.$$

因此,级数 $\sum_n |\xi_{t_n} - \lambda|$ a.s. 收敛,也就是说 ξ_{t_n} a.s. 收敛于 λ. 而对于 $t>1$,总可以找到 n 使得

$$ct_{n-1} = t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1} = c^{-1} t_n.$$

再由占位时过程的单调性,

$$ct_n^{-1} Y_{t_n} \phi \leqslant t^{-1} Y_t \phi \leqslant c^{-1} Y_{t_{n+1}} \phi.$$

所以，

$$c\lambda \leqslant \liminf \xi_t \leqslant \limsup \xi_t \leqslant c^{-1}\lambda, \text{a. s.}$$

令 $c \to 1$ 就证明了该定理. □

§8.3 情形 2：$d<\alpha/\beta$

同上讨论，我们仍对任意固定 $\phi\in pC_c(\mathbb{R}^d)$，$\|\phi\|_1=1$，考察

$$P^{\lambda\mathscr{L}} e^{-t^{-1}\langle\phi, Y_{ts}\rangle} = e^{-\lambda\|u_t(ts)\|_1}, \tag{8.3.1}$$

其中 $u_t(s)$ 是下面积分方程的非负解

$$u_t(s) = \int_0^s drS_r[t^{-1}\phi] - \int_0^s drS_{s-r}[\gamma u_t^{1+\beta}(r)],\ s \geqslant 0. \tag{8.3.2}$$

令 $v_t(s,x) \triangleq t^{d/\alpha}u_t(ts, t^{1/\alpha}x)$，$s\geqslant 0$，$x\in\mathbb{R}^d$，则

$$\|u_t(ts)\|_1 = \|v_t(s)\|_1. \tag{8.3.3}$$

利用 α-对称稳定过程的自相似性，不难验证 $v_t(s)$ 满足如下方程

$$v_t(s) = w_{\mu_t}(s) - t^{1-d\beta/\alpha}\int_0^s drS_{s-r}[\gamma(t^{1/\alpha}x)v_t^{1+\beta}(r)] \tag{8.3.4}$$

其中 $\mu_t(dx) = t^{d/\alpha}\phi(t^{1/\alpha}x)dx$.

关于方程(8.3.4)的解，我们有

引理 8.3.1 若 $d<\alpha/\beta$，$0<c\leqslant\gamma$（c 为常数），则存在 $\delta>0$，使 $\|v_t(1)\|_1\leqslant Ct^{-\delta}$，$t\geqslant 1$.

证明 选取 $L>0$ 使得 ϕ 在 $\{|x|<L\}$ 以外为零，另取 $K>2L$. 根据(8.3.1)，$v_t(s)$ 是关于 s 单调增的，因此

$$\|v_t(1)\|_1 \leqslant \int_1^2 ds\|v_t(s)\|_1 = \int_1^2 ds\|S_{2-s}v_t(s)\|_1.$$

注意到，$v_t(s)\leqslant w_{\mu_t}(2)$，$s\leqslant 2$，我们可以继续上面的计算为

$$\leqslant \int_1^2 ds\int_{|x|\geqslant 2K} dx(S_s w_{\mu_t}(2))(x) + \int_1^2 ds\int_{|x|\leqslant 2K} dx(S_{2-s}v_t(s))(x). \tag{8.3.5}$$

显然，

$$\| w_{\mu_t}(s) \|_1 \equiv s. \tag{8.3.6}$$

由引理 8.1.1 的(2),(4)和(1.9.10)我们有

$$\int_{|y|>K} dy w_{\mu_t}(2,y) \leqslant \int_{|y|>K-L} dy w(2,y) \leqslant \text{const}\, K^{-\alpha}. \tag{8.3.7}$$

(8.3.5)中的第一项等于

$$\int_1^2 ds \int_{|x|\geqslant 2K} ds \int dy p_\alpha(s, y-x) w_{\mu_t}(2,y)$$

$$\leqslant \int_{|y|>K} dy w_{\mu_t}(2,y) + \int_1^2 ds \int_{|z|>K} dz p_\alpha(s,z) \|w_{\mu_t}(2)\|_1$$

$\leqslant \text{const} K^{-\alpha}$(由(8.3.6),(8.3.7) 与(1.9.10)).

应用 Jensen 不等式,(8.3.5)中的第二项小于

$$\left(\int_{|x|\leqslant 2K} dx\right)^{\beta/(1+\beta)} \left(\int_1^2 ds \int_{|x|\leqslant 2K} dx (S_{2-s} v_t^{1+\beta}(s))(x)\right)^{1/(1+\beta)}$$

$$\leqslant c^{-1/(1+\beta)} \left(\int_{|x|\leqslant 2K} dx\right)^{\beta/(1+\beta)}$$

$$\times \left(\int_1^2 ds \int_{|x|\leqslant 2K} dx S_{2-s}(\gamma(t^{1/\alpha}x) v_t^{1+\beta}(s)(x))\right)^{1/(1+\beta)}. \tag{8.3.8}$$

而(8.3.4)告诉我们 $\int_0^2 ds S_{2-s}\gamma(t^{1/\alpha}\,\cdot) v_t^{1+\beta}(s) \leqslant t^{d\beta/\alpha-1} w_{\mu_t}(2)$,所以(8.3.8)小于

$$\text{const} K^{d\beta/(1+\beta)} (t^{d\beta/\alpha-1} \|w_{\mu_t}(2)\|_1)^{1/(1+\beta)}.$$

再由(8.3.6)并取 $K=t^\varepsilon, \varepsilon>0$,上式小于

$$\text{const}\, t^{\varepsilon d\beta/(1+\beta)+(d\beta/\alpha-1)/(1+\beta)}.$$

由于 $d\beta/\alpha-1<0$,我们可选取 ε 充分小以满足我们要求的下降阶数. □

定理8.3.2 若 $d<\alpha/\beta, 0<c\leqslant\gamma$($c$ 为常数),Y_t 是以 $\lambda\mathscr{L}$ 为初始测度的超对称稳定过程的占位时过程,则 $P^{\lambda\mathscr{L}}$-a.s. $\frac{Y_t}{t} \xrightarrow{v} 0$ $(t\to\infty)$.

证明 对于任意的 $\varepsilon>0$,由(8.3.1)可知,

$$P^{\lambda\mathscr{L}}(\xi_t > \varepsilon) \leqslant (1-e^{-\varepsilon})^{-1} P^{\lambda\mathscr{L}}(1-e^{-\xi_t}),$$

$$\leqslant (1-e^{-\varepsilon})^{-1}(1-\exp(-\lambda\|v_t(1)\|_1))$$

$$\leqslant \text{const}(1-e^{-\varepsilon})^{-1}t^{-\delta}(\text{由引理 } 8.3.1)$$

类似于上一定理的证明，对于$0<b<1$取 $t_n=b^{-n}$，由 Borel-Cantelli 引理可得 $\xi_{t_n}\to 0\ P^{\lambda\mathscr{L}}$-a. s. 而当 $t_n\leqslant t\leqslant t_{n+1}$时 $\xi_t\leqslant b^{-1}\xi_{t_{n-1}}$，这就证明了该定理. □

注8.3.3 当 γ 在一个区域上等于零时，定理8.3.2中的结论可能不再成立. 例如，若 $\gamma\equiv 0,\xi_t(dx)\equiv\lambda\mathscr{L}(dx)$. 因此定理8.3.2中的条件$0<c\leqslant\gamma$(在我们的证明中)是需要的，尽管可以稍微减弱.

§8.4 一个命题

前两节讨论了 $d>\alpha/\beta$ 和 $d<\alpha/\beta$ 两种情形. $d=\alpha/\beta$ 时结果如何呢？我们发现，这时引理8.2.2，引理8.2.3和引理8.3.1不再成立，所以用那里的方法处理 $d=\alpha/\beta$ 情形是行不通的，只有另辟蹊径. 本节的任务就是为此做准备. 在此假设 $d=\alpha/\beta$. 考虑积分方程

$$v(t)=w_\mu(t)-\int_0^t dsS_{t-s}[\gamma v^{1+\beta}(s)],\ 0\leqslant t\leqslant T. \tag{8.4.1}$$

下面要证如下的命题.

命题8.4.1 对于任意 $\mu\in M_F(\mathbb{R}^d)$，方程(8.4.1)有唯一解 $v_\mu\in pB^{1,T}$.

为此，先给出若干引理.

引理8.4.2 若 $v\in pB^{1,T}$且存在某 $\mu\in M_F(\mathbb{R}^d)$，使 $v\leqslant w_\mu$，则 $v\in B^{1+\beta,T}$，$v^{1+\beta}\in B^{1,T}$.

证明 设 $t_n,t_0\in[0,T]$，$t_n\to t_0(n\to\infty)$. 由假设知，在 L^1 中 $v(t_n)\to v(t_0)$，$(n\to\infty)$. 但 $v(t_n)\leqslant w_\mu(T)\in L^{1+\beta}$，$n=0,1,2,\cdots$. 由控制收敛定理，在 $L^{1+\beta}$中 $v(t_n)\to v(t_0)(n\to\infty)$，即 $v\in B^{1+\beta,T}$. 利用初等不等式

$$|x^{1+\beta}-y^{1+\beta}|\leqslant|x-y|(x^\beta+y^\beta),x,y\geqslant 0,(0<\beta\leqslant 1), \tag{8.4.2}$$

我们有

$$\|v^{1+\beta}(t_n) - v^{1+\beta}(t_0)\|_1 \leqslant 2\|(v(t_n) - v(t_0))w_\mu^\beta(T)\|_1$$

$$\leqslant 2\|v(t_n) - v(t_0)\|_{1+\beta}\|w_\mu^\beta(T)\|_{1+\beta}^\beta$$

（由 Hölder 不等式）

$$\to 0(n\to\infty).$$

这就推出 $v^{1+\beta}\in B^{1,T}$. □

引理8.4.3 若 $v\in pB^{1,T}$且存在某 $\mu\in M_F(\mathbb{R}^d)$使得 $v\leqslant w_\mu$. 若令

$$u(t):=\int_0^t dsS_{t-s}(\gamma v^{1+\beta}(s)),\ 0\leqslant t\leqslant T,$$

则 $u\in pB^{1,T}$.

证明 对$0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$,

$$\|u(t) - u(s)\|_1\leqslant \int_s^t dr\|\gamma v^{1+\beta}(t-r)\|_1$$

$$+\int_0^s dr\|\gamma[v^{1+\beta}(t-r) - v^{1+\beta}(s-r)]\|_1$$

$$\leqslant \mathrm{const}((t-s)\|\|w_\mu\|\|_{1+\beta,T}^{1+\beta}$$

$$+T\sup_{0\leqslant r\leqslant r+t-s\leqslant T}\|v^{1+\beta}(r+t-s)$$

$$-v^{1+\beta}(r)\|_1).$$

由引理8.1.1(2)和 $v^{1+\beta}(s)$关于 s 的一致连续性，当 $t\to s$ 时，

$$\|u(t) - u(s)\|_1\to 0.$$

这就证明了本引理. □

引理8.4.4 设 N 是正整数，令 $\tau=\frac{T}{N}$. 对 $i=1,2$和 $k\in\{0,1,\cdots,N-1\}$，设 $\mu_i\in M_F(\mathbb{R}^d)$，$u_i\leqslant w_{\mu_i}$，$v_i\in pB^{1,k\tau+\tau}$且

$$u_i(t) = w_{\mu_i}(t) - \int_0^t dsS_{t-s}[\gamma v_i^{1+\beta}(s)],0\leqslant t\leqslant k\tau+\tau, \tag{8.4.3}$$

则

$$\sup_{k\tau\leqslant t\leqslant k\tau+\tau}\|u_1^{1+\beta}(t) - u_2^{1+\beta}(t)\|_1$$

$$\leqslant 2\|\|w_{\mu_1} - w_{\mu_2}\|\|_{1+\beta,T}\|\|w_{\mu_1+\mu_2}\|\|_{1+\beta,T}^{\beta}$$

$$+ 2c\|\|v_1^{1+\beta} - v_2^{1+\beta}\|\|_{1,k\tau}\int_0^T ds\|S_s w_{\mu_1+\mu_2}^{\beta}(T)\|$$

$$+ 2c\sup_{k\tau\leqslant t\leqslant k\tau+\tau}\|v_1^{1+\beta}(t) - v_2^{1+\beta}(t)\|_1\int_0^T ds\|S_s w_{\mu_1+\mu_2}^{\beta}(T)\|. \tag{8.4.4}$$

证明 设 $t\in[k\tau,k\tau+\tau]$，由(8.4.3)得，

$$\|u_1^{1+\beta}(t) - u_2^{1+\beta}(t)\|_1$$

$$\leqslant 2\|(u_1(t) - u_2(t))w_{\mu_1+\mu_2}^{\beta}(T)\|_1$$

$$\leqslant 2\|(w_{\mu_1}(t) - w_{\mu_2}(t))w_{\mu_1+\mu_2}^{\beta}(T)\|_1$$

$$+ 2c\int_0^t ds\|(S_{t-s}|v_1^{1+\beta}(s) - v_2^{1+\beta}(s)|)w_{\mu_1+\mu_2}^{\beta}(T)\|_1$$

(由(8.4.3))

$$\triangleq 2J_1 + 2J_2.$$

由 Hölder 不等式得，

$$J_1 \leqslant \|\|w_{\mu_1} - w_{\mu_2}\|\|_{1+\beta,T}\|\|w_{\mu_1+\mu_2}\|\|_{1+\beta,T}^{\beta},$$

因为 S_t 是 L^2 上的自伴算子①，所以

$$J_2\leqslant\int_0^t ds\{\|v_1^{1+\beta}(s) - v_2^{1+\beta}(s)\|_1\|S_{t-s}w_{\mu_1+\mu_2}^{\beta}(T)\|\}$$

$$=\int_0^{k\tau} ds\{\|v_1^{1+\beta}(s) - v_2^{1+\beta}(s)\|_1\|S_{t-s}w_{\mu_1+\mu_2}^{\beta}(T)\|\}$$

$$+\int_{k\tau}^t ds\{\|v_1^{1+\beta}(s) - v_2^{1+\beta}(s)\|_1\|S_{t-s}w_{\mu_1+\mu_2}^{\beta}(T)\|\}$$

$$\leqslant \|\|v_1^{1+\beta} - v_2^{1+\beta}\|\|_{1,k\tau}\int_0^T ds\|S_s w_{\mu_1+\mu_2}^{\beta}(T)\|$$

$$+ \sup_{k\tau\leqslant t\leqslant k\tau+k}\|v_1^{1+\beta}(t) - v_2^{1+\beta}(t)\|_1\int_0^T ds\|S_s w_{\mu_1+\mu_2}^{\beta}(T)\|.$$

从而引理得证. □

下面讨论唯一性.

---

① $\forall\ \phi,\psi\in L^2,(S_t\phi,\psi)=(\phi,S_t\psi)$.

引理8.4.5 给定 $\mu\in M_F(\mathbb{R}^d)$，若 $v_1,v_2\in pB^{1,T}$ 都是方程(8.4.1)的解，则 $v_2=v_2\triangleq v_\mu$.

证明 由引理8.1.2(6)，可选取 N 充分大，也即是 $\tau=T/N$ 充分小，使得 $\delta:=2c\int_0^\tau ds\|S_s w_{2\mu}^\beta(T)\|<1$. 设有某整数 k，$0\leqslant k\leqslant N-1$，使得在 $[0,k\tau]$ 上，$v_1(t)=v_2(t)$. 显然，对 $k=0$ 条件满足. 由引理8.4.4，

$$\begin{aligned}&\sup_{k\tau\leqslant t\leqslant k\tau+k}\|v_1^{1+\beta}(t)-v_2^{1+\beta}(t)\|_1\\ \leqslant\ &\delta\sup_{k\tau\leqslant t\leqslant k\tau+k}\|v_1^{1+\beta}(t)-v_2^{1+\beta}(t)\|_1.\end{aligned}$$

所以

$$\sup_{k\tau\leqslant t\leqslant k\tau+k}\|v_1^{1+\beta}(t)-v_2^{1+\beta}(t)\|_1=0.$$

从而

$$v_1(t)=v_2(t),t\in[0,k\tau+\tau].$$

依此类推得 $v_1(t)=v_2(t)$，$t\in[0,T]$. □

引理8.4.6 令 $M_{sol}\triangleq\{\mu\in M_F(\mathbb{R}^d)$：(8.4.1)有解 $v_\mu\in pB^{1,T}\}$，则 M_{sol} 是 $M_F(\mathbb{R}^d)$ 的闭子集.

证明 设 $\mu_n\in M_{sol}$，$\mu\in M_F(\mathbb{R}^d)$，且 $\mu_n\to\mu(n\to\infty)$（弱收敛），须证 $\mu\in M_{sol}$. 由引理8.1.2(6)，可选取 N 充分大，即 $\tau=\frac{T}{N}$ 充分小，使 $\delta:=2c\sup_{n,m}\int_0^\tau ds\|S_s w_{\mu_n+\mu_m}^\beta(T)\|<1$. 设有某整数 k，$0\leqslant k\leqslant N-1$，使序列 $\{v_{\mu_n}\}$ 满足 $b_k=\lim_{n,m\to\infty}|||v_{\mu_n}^{1+\beta}-v_{\mu_m}^{1+\beta}|||_{1,k\tau}=0$（注意：至少对 $k=0$ 条件满足），则由引理8.4.4，引理8.1.1(2)和引理8.1.2，可以进一步推得 $b_{k+1}=0$. 依此类推得 $b_N=0$，即

$$\lim_{n,m\to\infty}|||v_{\mu_n}^{1+\beta}-v_{\mu_m}^{1+\beta}|||_{1,T}=0. \tag{8.4.5}$$

这表明在 $pB^{1,T}$ 中，$v_{\mu_n}^{1+\beta}$ 收敛于某 u. 进一步，由(8.4.1)得

$$|||v_{\mu_n}-v_{\mu_m}|||_{1,T}\leqslant|||w_{\mu_n}-w_{\mu_m}|||_{1,T}+cT|||v_{\mu_n}^{1+\beta}-v_{\mu_m}^{1+\beta}|||_{1,T}.$$

根据引理8.1.2(5)及(8.4.5)得 $\lim_{n,m\to\infty}|||v_{\mu_n}-v_{\mu_m}|||_{1,T}=0$. 所以在 $pB^{1,T}$ 中，v_{μ_n} 收敛于某一个函数 v. 因此 $u=v^{1+\beta}$.

在 $B^{1,T}$ 中对方程

$$v_{\mu_n}(t) = w_{\mu_n}(t) - \int_0^t ds S_{t-s}[\gamma v_{\mu_n}^{1+\beta}(s)]$$

两端取极限($n\to\infty$)，得

$$v(t) = w_\mu(t) - \int_0^t ds S_{t-s}[\gamma v^{1+\beta}(s)].$$

由定义容易验证，在 $pB^{1,T}$中，

$$\int_0^t ds S_{t-s}[\gamma v_{\mu_n}^{1+\beta}(s)] \to \int_0^t ds S_{t-s}[\gamma v^{1+\beta}(s)], (n\to\infty).$$

于是 v 是方程(8.4.1)的解，故 $\mu\in M_{sol}$. □

引理8.4.7 令 $\mathscr{H} \triangleq \{\mu:\mu$ 是$(\mathbb{R}^d,\mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$上测度，$\mu(dx)=\phi(x)dx,\phi\in pC_p(\mathbb{R}^d)\}$，则 $\mathscr{H}$ 在 $M_F(\mathbb{R}^d)$中稠.

证明 显然 $\mathscr{H}\subset M_F(\mathbb{R}^d)$. 对$\forall\ \mu\in M_F(\mathbb{R}^d)$，令 $\phi_n(x)=\rho_n(x)\int_{\mathbb{R}^d}p(1/n,x-y)\mu(dy)$，其中 $\rho_n(x)=n/(n+|x|^p)$，$p(t,x)=(2\pi t)^{-d/2}\exp(-|x|^2/2t),t>0,x\in\mathbb{R}^d$. 则对每个固定的 n，$\phi_n\in pC_p(\mathbb{R}^d)$. 令 $\mu_n(dx)=\phi_n(x)dx$，则 $\mu_n\in\mathscr{H}$. 下面只须证 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu\ (n\to\infty)$，即对任何有界连续函数 f，

$$\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mu_n(dx)\to\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mu(dx). \tag{8.4.6}$$

为此，注意到，

$$\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mu_n(dx)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\rho_n(x)\left[\int_{\mathbb{R}^d}p\left(\frac{1}{n},x-y\right)\mu(dy)\right]dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}\mu(dy)\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\rho_n(x)p\left(\frac{1}{n},x-y\right)dx$$

(由 Fubini 定理).

因为$\left|S_{\frac{1}{n}}[f\rho_n](y)\right|$一致有界，故只要证明

$$S_{\frac{1}{n}}[f\rho_n](y)\to f(y),(n\to\infty),\forall\ y\in\mathbb{R}^d, \tag{8.4.7}$$

则可由控制收敛定理得(8.4.6). 现往证上式.

$$\left|S_{\frac{1}{n}}[f\rho_n](y)-f(y)\right|$$

$$\leqslant\left|S_{\frac{1}{n}}[f\rho_n](y)-S_{\frac{1}{n}}f(x)\right|+\left|S_{\frac{1}{n}}f(x)-f(y)\right|$$

$$=\left|S_{\frac{1}{n}}[f(1-\rho_n)](y)\right|+\left|S_{\frac{1}{n}}f(x)-f(y)\right|$$

$$\triangleq I_1 + I_2.$$

先证 $I_1 \to 0(n\to\infty)$,

$$\begin{aligned}
&S_{\frac{1}{n}}[f(1-\rho_n)](y) \\
&= \int_{\mathscr{R}^d} f(x)[1-\rho_n(x)]p\left(\frac{1}{n}, y-x\right)dx \\
&= \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathscr{R}^d} f(x)[1-\rho_n(x)]\exp\left\{-\frac{n|y-x|^2}{2}\right\}dx \\
&= \pi^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathscr{R}^d} f\left(y+\sqrt{\frac{2}{n}}z\right)\left[1-\rho_n\left(y+\sqrt{\frac{2}{n}}z\right)\right]e^{-|z|^2} \\
&\quad \times \left(\text{作代换 } z=(x-y)\sqrt{\frac{n}{2}}\right).
\end{aligned}$$

因为 $f\left(y+\sqrt{\frac{2}{n}}z\right)\left[1-\rho_n\left(y+\sqrt{\frac{2}{n}}z\right)\right]$有界,$\int e^{-|z|^2}dz$ 可积,并且 $f\left(y+\sqrt{\frac{2}{n}}z\right)\left[1-\rho_n\left(y+\sqrt{\frac{2}{n}}z\right)\right]e^{-|z|^2} \to 0(n\to\infty)$. 由控制收敛定理得 $I_1 \to 0(n\to\infty)$. S_t 是强连续算子,故 $I_2 \to 0(n\to\infty)$. 于是(8.4.7)成立. □

命题8.4.1的证明 首先命题中的唯一性由引理8.4.5得到. 根据引理8.4.6,只要证明对 $M_F(\mathscr{R}^d)$的稠子集 $\mathscr{H}$ 方程(8.4.1)的解存在即可. 设 $\mu=\phi(x)dx\in\mathscr{H}$,我们有 $w_\mu(t)=\int_0^t S_s\phi ds$,这时方程(8.4.1)和方程(8.0.2)一致,而(8.0.2)存在 $v:[0,T]\to C_0(\mathscr{R}^d)$ 连续解. 由于 $v\leqslant w_\mu$, $w_\mu\in pB^{1,T}$,所以由控制收敛定理得,$v_\mu\triangleq v\in pB^{1,T}$,这样就完成了存在性的证明. 从引理8.4.6的证明知,v_μ 关于 μ 连续. 至此,命题8.4.1的证明全部完成. □

作为本节的结束,考虑下面参数是 $t>0$的积分方程

$$v_t(s) = w_{\mu_t}(s) - \int_0^s dr S_{s-r}[\gamma(t^{1/\alpha}\ \cdot)v_t^{1+\beta}(r)], 0\leqslant s\leqslant T, \tag{8.4.8}$$

这里 $\mu_t(dx)=\theta t^{d/\alpha}\phi(t^{1/\alpha}x)dx$, $\theta>0$, $\phi\in pC_c(\mathscr{R}^d)$ 且 $\|\phi\|_1=1$, $\gamma(x)\to a$(常数)($|x|\to\infty$). 由命题8.4.1知对每个固定的 t,方程(8.4.8)

在 $pB^{1,T}$ 中存在唯一解. 方程(8.4.8)很重要,下面将发现该方程的解 $v_t(s)$ 的收敛问题与占位时过程 Y 的渐近行为有密切的关系.

引理8.4.8 在(8.4.8)式及其后面的假设下,若 N 是正整数,$\tau=\frac{T}{N}$,则对 $k\in\{0,1,\cdots,N-1\}$ 有

$$\begin{aligned}
&\sup_{k\tau\leqslant s\leqslant k\tau+\tau}\|v_{t_1}^{1+\beta}(s)-v_{t_2}^{1+\beta}(s)\|_1\\
&\leqslant 2\,|||w_{\mu_{t_1}}-w_{\mu_{t_2}}|||_{1+\beta,T}\,|||w_{\mu_{t_1}+\mu_{t_2}}|||_{1-\beta,T}^{\beta}\\
&\quad+2a\,|||v_{t_1}^{1+\beta}-v_{t_2}^{1+\beta}|||_{1,k\tau}\int_0^T dr\|S_r w_{\mu_{t_1}+\mu_{t_2}}^{\beta}(T)\|\\
&\quad+2a\sup_{k\tau\leqslant s\leqslant k\tau+\tau}\|v_{t}^{1+\beta}(s)-v_{t_2}^{1+\beta}(s)\|_1\\
&\quad\times\int_0^\tau dr\|S_r w_{\mu_{t_1}+\mu_{t_2}}^{\beta}(T)\|\\
&+2\,|||\varepsilon_{t_1}v_{t_1}^{1+\beta}-\varepsilon'_{t_2}v_{t_2}^{1+\beta}|||_{1,k\tau}\int_0^T dr\|S_r w_{\mu_{t_1}+\mu_{t_2}}^{\beta}(T)\|\\
&+2\sup_{k\tau\leqslant s\leqslant k\tau+\tau}\varepsilon_{t_1}v_{t_1}^{1+\beta}(s)-\varepsilon'_{t_2}v_{t_2}^{1+\beta}(s)\|_1\\
&\quad\times\int_0^\tau dr\|S_r w_{\mu_{t_1}+\mu_{t_2}}^{\beta}(T)\|,
\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_{t_1},\varepsilon'_{t_2}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的连续函数($t_1,t_2>0$是参数)满足

$$|||\varepsilon_{t_1}v_{t_1}^{1+\beta}-\varepsilon'_{t_2}v_{t_2}^{1+\beta}|||_{1,k\tau}\to 0\,(t_1,t_2\to\infty),$$

$$\sup_{k\tau\leqslant s\leqslant k\tau+\tau}\|\varepsilon_{t_1}v_{t_1}^{1+\beta}(s)-\varepsilon'_{t_2}v_{t_2}^{1+\beta}(s)\|_1\to 0\,(t_1,t_2\to\infty).$$

证明 因为 $\gamma(x)\to a(|x|\to\infty)$,故可设 $\gamma(t_1^{1/\alpha}x)=a+\varepsilon_{t_1}(x)$,$\gamma(t_2^{1/\alpha}x)=a+\varepsilon'_{t_2}(x)$,其中 $\varepsilon_{t_1}(x),\varepsilon'_{t_2}(x)\to 0\,(t_1,t_2\to\infty)$,对 $\forall\ x\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$. 设 $s\in[k\tau,k\tau+\tau]$,利用初等不等式8.4.2,

$$\begin{aligned}
&\|v_{t_1}^{1+\beta}(s)-v_{t_2}^{1+\beta}(s)\|_1\\
&\leqslant 2\|(v_{t_1}(s)-v_{t_2}(s))w_{\mu_{t_1}+\mu_{t_2}}^{\beta}(T)\|_1\\
&\leqslant 2\|(w_{\mu_{t_1}}(s)-w_{\mu_{t_2}}(s))w_{\mu_{t_1}+\mu_{t_2}}^{\beta}(T)\|_1\\
&\quad+2\int_0^s dr\|[S_{s-r}\{\gamma(t_1^{1/\alpha}x)v_{t_1}^{1+\beta}(r)\\
&\quad-\gamma(t_2^{1/\alpha}x)v_{t_2}^{1+\beta}(r)\}]w_{\mu_{t_1}+\mu_{t_2}}^{\beta}(T)\|_1
\end{aligned}$$

$$\triangleq I_1 - I_2. \tag{8.4.9}$$

根据 Hölder 不等式，

$$I_1 \leqslant 2 |||w_{\mu_{t_1}} - w_{\mu_{t_2}}|||_{1+\beta,T} |||w_{\mu_{t_1}+\mu_{t_2}}|||^{\beta}_{1+\beta,T},$$

$$I_2 \leqslant 2\int_0^s dr \| \{S_{s-r}[a|v_{t_1}^{1+\beta}(r) - v_{t_2}^{1+\beta}(r)|$$

$$+ |\varepsilon_{t_1} v_{t_1}^{1+\beta}(r) - \varepsilon'_{t_2} v_{t_2}^{1+\beta}(r)|]\} w^{\beta}_{\mu_{t_1}+\mu_{t_2}}(T)\|_1$$

$$\leqslant 2\int_0^s dr \| [S_{s-r}(a|v_{t_1}^{1+\beta}(r) - v_{t_2}^{1+\beta}(r)|)] w^{\beta}_{\mu_{t_1}+\mu_{t_2}}(T)\|_1$$

$$+ 2\int_0^s dr \| [S_{s-r}|\varepsilon_{t_1} v_{t_1}^{1+\beta}(r) - \varepsilon'_{t_2} v_{t_2}^{1+\beta}(r)|] w^{\beta}_{\mu_{t_1}+\mu_{t_2}}(T)\|_1$$

$$\leqslant 2a\int_0^s dr \{ \|v_{t_1}^{1+\beta}(r) - v_{t_2}^{1+\beta}(r)\|_1 \|S_{s-r} w^{\beta}_{\mu_{t_1}+\mu_{t_2}}(T)\| \}$$

$$+ 2\int_0^s dr \{ \|\varepsilon_{t_1} v_{t_1}^{1+\beta}(r) - \varepsilon'_{t_2} v_{t_2}^{1+\beta}(r)\|_1$$

$$\|S_{s-r} w^{\beta}_{\mu_{t_1}+\mu_{t_2}}(T)\| \} \ (S_s \text{ 是 } L^2 \text{ 上自伴算子})$$

$$\leqslant 2a |||v_{t_1}^{1+\beta} - v_{t_2}^{1+\beta}|||_{1,k\tau} \int_0^T dr \|S_r w^{\beta}_{\mu_{t_1}+\mu_{t_2}}(T)\|$$

$$+ 2a \sup_{k\tau \leqslant s \leqslant k\tau+\tau} \|v_{t_1}^{1+\beta}(s) - v_{t_2}^{1+\beta}(s)\|_1$$

$$\times \int_0^\tau dr \|S_r w^{\beta}_{\mu_{t_1}+\mu_{t_2}}(T)\|$$

$$+ 2 |||\varepsilon_{t_1} v_{t_1}^{1+\beta} - \varepsilon'_{t_2} v_{t_2}^{1+\beta}|||_{1,k\tau} \int_0^T dr \|S_r w^{\beta}_{\mu_{t_1}+\mu_{t_2}}(T)\|$$

$$+ 2 \sup_{k\tau \leqslant s \leqslant k\tau+\tau} \|\varepsilon_{t_1} v_{t_1}^{1+\beta}(s) - \varepsilon'_{t_2} v_{t_2}^{1+\beta}(s)\|_1$$

$$\times \int_0^\tau dr \|S_r w^{\beta}_{\mu_{t_1}+\mu_{t_2}}(T)\|.$$

将 I_1, I_2 的上述不等式代人(8.4.9)式，并取 $\sup_{k\tau \leqslant t \leqslant k\tau+\tau}$，则结论的第一部分成立.

下证第二部分. 首先证 $\|\varepsilon_{t_1} v_{t_1}^{1+\beta} - \varepsilon'_{t_2} v_{t_2}^{1+\beta}\|_{1,k\tau} \to 0 \ (t_1, t_2 \to \infty)$.

$$|||\varepsilon_{t_1} v_{t_1}^{1+\beta} - \varepsilon'_{t_2} v_{t_2}^{1+\beta}|||_{1,k\tau} \leqslant |||\varepsilon_{t_1} v_{t_1}^{1+\beta} - \varepsilon'_{t_2} v_{t_2}^{1+\beta}|||_{1,T}$$

$$\leqslant |||\varepsilon_{t_1} v_{t_1}^{1+\beta}|||_{1,T} + |||\varepsilon'_{t_2} v_{t_2}^{1+\beta}|||_{1,T}$$

$$\leqslant \|\varepsilon_{t_1} w_{\mu_{t_1}}^{1+\beta}(T)\|_1 + \|\varepsilon'_{t_2} w_{\mu_{t_2}}^{1-\beta}(T)\|_1.$$

注意，由于 $v_{t_1} \in B_+^{1,T}$，而 $v_{t_1} \leqslant w_{\mu_{t_1}}$，根据引理8.4.2，$v_{t_1}^{1+\beta} \in pB^{1,T}$，从而上式的记号有意义. 这样，我们仅需证

$$\|\varepsilon_{t_1} w_{\mu_{t_1}}^{1+\beta}(T)\|_1 \to 0(t_1 \to \infty)$$

即可.

容易验证，在 $M_F(\mathbb{R}^d)$ 中，$\mu_{t_1} \to \theta\delta_0 \triangleq \mu\theta(t_1 \to \infty)$（弱收敛），其中 δ_0 是集中在0点的单点测度. 所以由引理8.1.2(5)得

$$|||w_{\mu_{t_1}} - w_{\mu_\theta}|||_{1+\beta,T} \to 0(t_1 \to \infty). \quad (8.4.10)$$

同理可得，

$$\|w_{\mu_{t_1}+\mu_\theta}(T)\|_{1+\beta}^\beta \to \|w_{2\mu_\theta}(T)\|_{1+\beta}^\beta(t_1 \to \infty). \quad (8.4.11)$$

根据初等不等式(8.4.2)和 Hölder 不等式可以推出

$$|||w_{\mu_{t_1}}^{1+\beta} - w_{\mu_\theta}^{1+\beta}|||_{1,T} \leqslant 2|||w_{\mu_{t_1}} - w_{\mu_\theta}|||_{1+\beta,T}\|w_{\mu_{t_1}+\mu_\theta}(T)\|_{1+\beta}^\beta. \quad (8.4.12)$$

再由(8.4.10)，(8.4.11)，(8.4.12) 得 $|||w_{\mu_{t_1}}^{1+\beta} - w_{\mu_\theta}^{1+\beta}|||_{1,T} \to 0(t_1 \to \infty)$. 特别地，

$$\|w_{\mu_{t_1}}^{1+\beta}(T) - w_{\mu_\theta}^{1+\beta}(T)\|_1 \to 0(t_1 \to \infty). \quad (8.4.13)$$

因为 $\|\varepsilon_{t_1} w_{\mu_{t_1}}^{1+\beta}(T)\|_1 \leqslant \|\varepsilon_{t_1}[w_{\mu_{t_1}}^{1+\beta}(T) - w_{\mu_\theta}^{1+\beta}(T)\|_1 + \|\varepsilon_{t_1} w_{\mu_\theta}^{1+\beta}(T)\|_1$，其中 ε_{t_1} 有界（不依赖于 $t_1 > 0, x \in \mathbb{R}^d$），且 $\varepsilon_{t_1}(x) \to 0(t_1 \to \infty)$，$\forall\, x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. 由(8.4.13)及控制收敛定理，便得

$$\|\varepsilon_{t_1} w_{\mu_{t_1}}^{1+\beta}(T)\|_1 \to 0(t_1 \to \infty).$$

同理可证 $\sup_{kr \leqslant s \leqslant kr+r}\|\varepsilon_{t_1} v_{t_1}^{1+\beta}(s) - \varepsilon'_{t_2} v_{t_2}^{1-\beta}(s)\|_1 \to 0(t_1, t_2 \to \infty)$. 至此引理完全获证. □

§8.5 情形3：$d = \alpha/\beta$

定理8.5.1 假设 $(X_t, t \geqslant 0, P^{\lambda\mathscr{L}})$ 是前面定义的超过程. 设 $d = \alpha/\beta$，$\gamma(x) \to a$（常数）$(|x| \to \infty)$，则 $Y_t/t \xrightarrow{d} \xi\lambda ds(t \to \infty)$. 其中

当 $a\neq 0$时，ξ是非退化、无穷可分、均值为1的随机变量；当 $a=0$时，$\xi\equiv 1$.

证明 任意固定 $\phi\in C_c(\mathbb{R}^d)_+$，须证

$$\xi_t \triangleq t^{-1}\langle\phi, Y_t\rangle \xrightarrow{d} \xi\lambda\|\phi\|_1 (t\to\infty),$$

而ξ是具有所述性质的随机变量.特别地，ξ的分布与ϕ无关.不失一般性，我们假设$\|\phi\|_1=1$.换言之，我们须证，$P^{\lambda\mathscr{L}}e^{-\theta\xi_t}\to P^{\lambda\mathscr{L}}e^{-\theta\xi\lambda}$，$(t\to\infty)$，$\forall\ \theta>0$.由方程(8.0.1)，

$$P^{\lambda\mathscr{L}}e^{-\theta\xi_t} = e^{-\lambda\|u_t(t)\|_1}, \tag{8.5.1}$$

其中$u_t(s)$是积分方程(8.2.2)的唯一非负解.令

$$v_t(s,x) = t^{d/\alpha}u_t(ts, t^{1/\alpha}x),\ s\geqslant 0, x\in\mathbb{R}^d,$$

即

$$\|u_t(ts)\|_1 = \|v_t(s)\|_1. \tag{8.5.2}$$

可以验证$v_t(s)$满足

$$v_t(s) = w_{\mu_t}(s) - t^{1-d\beta/\alpha}\int_0^s drS_{s-r}[\gamma(t^{1/\alpha}x)v_t^{1+\beta}(r)], \tag{8.5.3}$$

其中$\mu_t(dx)=\theta t^{d/\alpha}\phi(t^{1/\alpha}x)dx$.根据定理的假设，$1-d\beta/\alpha=0$，于是(8.5.3)化为(8.4.8).

由引理8.4.8中的讨论知，在$M_F(\mathbb{R}^d)$中，$\mu_t\to\mu_\theta(t\to\infty)$，以及$|||w_{\mu t}-w_{\mu_\theta}|||_{1,T}\to\infty(t\to\infty)$.另外利用引理8.4.8和类似于引理8.4.6的证明方法，可以证明若方程(8.4.8)的解$v_t(s)$在$pB^{1,T}$中，存在某v,u使在$B^{1,T}$中，$v_t\to v, v_t^{1+\beta}\to u$，$(t\to\infty)$，因此可得$u=v^{1+\beta}$.因此不难证明在$pB^{1,T}$中，$\int_0^s drS_{s-r}[\gamma(t^{1/\alpha}x)v_t^{1+\beta}(r)]\to\int_0^s drS_{s-r}[av^{1+\beta}(r)](t\to\infty)$，从而我们得到

$$v(s) = w_{\mu_\theta}(s) - \int_0^s drS_{s-r}[av^{1+\beta}(r)],$$

即

$$v(s) = \theta\int_0^s drp_\alpha(r,\cdot) - \int_0^s drS_{s-r}[av^{1+\beta}(r)] \tag{8.5.4}$$

由命题8.4.1,方程(8.5.4)在 $pB^{1,T}$ 中存在唯一解,记为 v_{μ_θ}. 因为在 $pB^{1,T}$ 中, $v_t \to v_{\mu_\theta}(t\to\infty)$, 所以

$$\|v_t(1)\|_1 \to \|v_{\mu_\theta}(1)\|_1 (t\to\infty)(\text{这里取 } T=1). \quad (8.5.5)$$

由(8.4.13),(8.5.1),(8.5.5)得

$$P^{\lambda\mathscr{L}} e^{-\theta\xi_t} \to e^{-\lambda\|v_{\mu_\theta}(1)\|_1} = P^{\lambda\mathscr{L}} e^{-\theta\lambda\xi}, (t\to\infty). \quad (8.5.6)$$

右端的等式利用了 Laplace 变换的连续性定理. 由方程(8.5.4)得

$$\|v_{\mu_\theta}(1)\|_1 = \theta - a\int_0^1 dr \|v_{\mu_\theta}^{1+\beta}(r)\|_1, \ \theta > 0. \quad (8.5.7)$$

因为(8.5.4)与 ϕ 无关,所以 ξ 的分布与 ϕ 无关. 由引理8.1.1(2)得

$$\int_0^1 dr \|v_{\mu_\theta}^{1+\beta}(r)\|_1 \leqslant \|w_{\mu_\theta}\|_{1+\beta,1}^{1+\beta} \leqslant C\theta^{1+\beta},$$

从而由(8.5.7)得 $\|v_{\mu_\theta}(1)\|_1 \to 0(\theta\to 0_+)$, $(\|v_{\mu_\theta}(1)\|_1)'|_{\theta=0_+} = 1$. 进而由(8.5.6)式右端的等式得, $P^{\lambda\mathscr{L}}\xi = 1$.

当 $a\neq 0$时,若假设(8.5.7)右端恒为 θ,则 $\int_0^1 dr\|v_{\mu_\theta}^{1+\beta}(r)\|_1 = 0$, 于是 $v_{\mu_\theta}\equiv 0$, 这和(8.5.7)矛盾. 所以 ξ 是非退化的. 另外,因为 ξ_t 是无穷可分的,所以 ξ 是无穷可分的. 最后,当 $a=0$ 时,由(8.5.7), $\|v_{\mu_\theta}(1)\|_1 = \theta$, 代入(8.5.6)右端得,

$$e^{-\lambda\theta} = P^{\lambda\mathscr{L}} e^{-\theta\lambda\xi},$$

即

$$P^{\lambda\mathscr{L}} e^{-\theta\xi} = e^{-\theta}, \ \forall\, \theta > 0.$$

由 Laplace 变换的唯一性得, $\xi\equiv 1$. □

系8.5.2 若 $d=\alpha/\beta$, $\gamma(x)\to 0(|x|\to\infty)$, 则 $\frac{Y_t}{t} \xrightarrow{P} \lambda dx(t\to\infty)$ (P 表示依概率收敛).

注8.5.3 Fleischmann-Gärtner(1986)在[73]中首先讨论了 γ 为常数的情况. 本节讨论了更一般的分枝率. 从两者结果比较来看,分枝率的变化引起有关结果的本质不同. 另一方面,我们看到 Y 的渐近行为与底过程状态空间的维数 d 密切相关. $d\neq\alpha/\beta$ 时, Y_t/t 趋于非随机测度,且极限测度不依赖于分枝特征;但当 $d=\alpha/$

β 时，则问题复杂得多. 当 $\gamma(x)\to a\neq 0(|x|\to\infty)$时，有关的随机变量 ξ 是非退化的，而 $a=0$时 ξ 是退化的（这时 Y 的渐近行为与 $d>\alpha/\beta$情形类似）. 可见在临界情形，Y 的渐近行为对 γ 的变化很敏感. 有理由认为，底过程的性质是影响占位时过程行为的主要因素，而分枝特征又起着某种"消长"作用.

文献评注：本章的内容取材于王国胜、赵学雷(1996)在[195]中的结果. 在证明方法上主要参考了[73]. 但由于这里考虑的情况比较一般，有些方法需要改进. 在 $d=\alpha/\beta$ 情况的讨论中，[73]中的方法不再适用，只有寻求新的思路，得到了崭新的结果.

第九章　绝对连续性

前面几章的讨论是在随机过程的一般理论框架内进行的. 另一方面，做为随机测度，它又有自己的特色问题. 譬如，它们的支撑集的结构、测度的奇异性及绝对连续性等等. 由于在研究支撑集的结构及奇异性时要用到非标准分析，我们在此不做详细讨论. 本章关心的是超过程的绝对连续性.

从前面已经可以看出，参数 ξ 与 Ψ 在超过程的研究中起着重要作用. 例如，若超 α-稳定过程($0<\alpha\leqslant 2$)的分枝特征为 $\Psi(x,z)=cz^2$, $c>0$, Dawson-Hochberg(1979)[25] 及 Zähle(1988)[219] 证明了超过程在任何时间的支撑集几乎处处具有 Hausdorff-维数 α. 也就是说，$d\geqslant\alpha$ 时相应的超稳定过程相对于 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度是奇异的，同时也显示了在低维空间上超过程的非奇异性.

§9.1　直线上超稳定过程的绝对连续性

当 $\Psi\equiv 0$时，相应的超过程退化为非随机测度. 因此若假设初始测度为 μ，底过程的转移概率密度(相对于某一参考测度 $\mathscr{L}$)为 $p_t(x,y)$，则由超过程(X_t,P^μ)的 Laplace 泛函可知，对于任意 $t>0$，X_t 相对于该参考测度 $\mathscr{L}$ 也是绝对连续的，其密度为 $\int_E\mu(dy)\times p_t(y,x)$. 因此，具体到$\mathbb{R}^d$ 上超稳定过程，在分枝特征恒为零时，无论维数多大，相应的测度值过程都是相对于 Lebesgue 测度绝对连续的.

考虑直线上二分枝超 α-对称稳定过程的情况. 假设分枝特征 $\Psi(x,z)=c(x)z^2$，而 $c(x)$是有界可测函数. 这时取参考测度为$\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度，并以 $p_t(x,y)$表示对称稳定过程的转移密度

函数.

采用前面的记号,取 $\phi_p(x)=1/(1+|x|)^p, p>0$. $\widetilde{M}:=\{\mu\in\bigcap_{p>1}M_p(\mathbb{R}):\int_{\mathbb{R}}\mu(dy)p_t(y,x)$ 是 $t>0$ 的连续函数,而且对于 $\forall T>0, p>0, \sup_{0<t\leqslant T}t^\beta\|\mu S_t\|_p<+\infty\}$.

引理9.1.1 当$1<\alpha\leqslant 2$时,我们有:

(B1)存在$0<\beta<1$使得对于 $T>0$,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sup_{x,y}p_t(x,y)t^\beta<\infty.$$

(B2)存在常数 $\gamma>0,\delta>0$使得对于任意的 $T>0$,有 $C_T>0$, $x,y\in\mathbb{R}, 0<h<1$,

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}}(p_{s+h}(z,x)-p_s(z,y))^2dzds\leqslant C_T(|x-y|^\gamma+h^\delta). \tag{9.1.1}$$

(B3)存在 $p_0>1$,若$0<p<p_0$, $\|\phi_p^{-1}S_t\phi_p\|$与$\|\phi_pS_t^*\phi_p^{-1}\|$是 t 的有界连续函数. 其中, $\phi_p^{-1}=1/\phi_p$, $S_t\phi(x)=\int_{\mathbb{R}}dyp_t(x,y)\phi(y)$, $S_t^*\phi(x)=\int_{\mathbb{R}}dyp_t(y,x)\phi(y)$.

证明 (B1),(B2)可由(1.9.3),(1.9.4)及(1.9.8)得到. 对于(B3),取 $p_0=\alpha$ 即可. □

定理9.1.2 设 X_t 是超 α-对称稳定过程,分枝特征为 $\Psi(x,z)=c(x)z^2$. 若 $\mu\in\widetilde{M}$,则

(1)$P^\mu(\forall t>0, X_t(dx)$关于 dx 绝对连续,且其密度 $X_t(x)$关于 $t>0$连续$)=1$.

(2)存在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$-值的正交鞅 W_t,使得对于所有$0<t_0<t$, P^μ-a.s.,

$$X_t(x)-X_{t_0}(x)=\int_{t_0}^t\sqrt{X_s(x)}\dot{W}_s(x)ds+\int_{t_0}^t\triangle_\alpha X_s(x)ds. \tag{9.1.2}$$

换句话说,上式可解释为,对于$\forall\ \phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$,

$\langle X_t,\phi\rangle-\langle X_{t_0},\phi\rangle$

$$= \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}} \sqrt{X_s(x)}\phi(x)\dot{W}_s(x)dsdx + \int_{t_0}^{t}\langle X_s(x), \triangle_\alpha\phi\rangle ds,$$

其中 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上速降函数的全体，$\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ 为其对偶（分布）空间，$\triangle_\alpha = -(-\triangle)^{\alpha/2}$，即是 α-对称稳定过程的无穷小算子.

定理的证明将通过如下几个引理来完成.

引理9.1.3 设 $\mu\in\widetilde{M}$，则 $\forall\ t>0, X_t(dx)$ 是几乎所有相对于 Lebesgue 测度绝对连续的.

证明 设 $p_h^x = p_h(x,\cdot)$，由引理9.1.1和系3.5.2知，$X_t^h(x) := \langle X_t, p_h^x\rangle$ 是适定的. 首先我们断言，$\forall\ T>0, 0<p<p_c$，

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}} P^\mu(X_t^h(x)^2)\phi_p(x)t^\beta dtdx < \infty \tag{9.1.3}$$

和

$$\lim_{h\to 0}\lim_{h'\to 0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} P^\mu(X_t^h(x) - X_t^{h'}(x))^2\phi_p(x)t^\beta dtdx = 0. \tag{9.1.4}$$

事实上，由系3.5.2，

$$P^\mu(X_t^h(x))^2 = \langle\mu, p_{t+h}^x\rangle^2 + \left\langle\mu, 2\int_0^t dsS_s c(S_{t-s+h}^x)^2\right\rangle.$$

根据 $\mu\in\widetilde{M}$ 与引理9.1.1(B1)，对于 $0<p'<p-1$，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\langle\mu, p_{t+h}^x\rangle^2\phi_p(x)t^\beta dtdx \\
&\qquad\leqslant \text{const}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\langle\mu, p_{t+h}^x\rangle\phi_{p-p'}(x)dtdx \\
&\qquad\leqslant \text{const}\langle\mu, \phi_{p-p'}\rangle < \infty,
\end{aligned}$$

而又由引理9.1.1(B1)和(B3)，并注意到 c 的有界性，

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\left\langle\mu, 2\int_0^t dsS_s c(p_{t-s+h}^x)^2\right\rangle\phi_p(x)t^\beta dtdx \\
&\qquad\leqslant \text{const}\int_0^T dt\int_{\mathbb{R}} dx\langle\mu, p_{t+h}^x\rangle\int_0^t\frac{ds}{(s+h)^\beta}\phi_p(x)t^\beta < \infty.
\end{aligned}$$

这就证明了(9.1.3). 至于(9.1.4)，再次应用系3.5.2，

$$\begin{aligned}
&P^\mu(X_t^h(x) - X_t^{h'}(x))^2 \\
&\qquad= P^\mu\langle X_t, p_h^x - p_{h'}^x\rangle^2
\end{aligned}$$

$$= \left\langle \mu, \int_0^t ds S_{t-s} 2c(p_{s+h}^x - p_{s+h'}^x)^2 \right\rangle + \langle \mu, p_{s+h}^x - p_{s+h'}^x \rangle^2.$$

同理可证(9.1.4). 于是由(9.1.3)和(9.1.4)即知,存在联合可测过程 $X_t(x,\omega):[0,\infty)\times\mathbb{R}\times\Omega\to[0,\infty)$满足

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}} P^\mu(X_t(x)^2)\phi_p(x)t^\beta dtdx < \infty, \forall\, T > 0, \quad (9.1.5)$$

和$\forall\ 1<p<p_0, T>0$,

$$\lim_{h\to 0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} P^\mu(X_t^h(x) - X_t(x))^2\phi_p(x)t^\beta dtdx = 0. \quad (9.1.6)$$

而且,对于任意 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
&P^\mu|\langle X_t,\phi\rangle - \int_{\mathbb{R}} X_t(x)\phi(x)dx|^2 \\
&\leqslant \lim_{h\to 0} P^\mu|\langle X_t^h,\phi\rangle - \int_{\mathbb{R}} X_t(x)\phi(x)dx|^2 \\
&\leqslant \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}} P^\mu(X_t^h(x) - X_t(x))^2\phi_p(x)dx\int_{\mathbb{R}}\phi_p^{-1}(x)\phi^2(x)dx.
\end{aligned}$$

由此及(9.1.6),即得所要结果. □

引理9.1.4 在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P^\mu)$的延拓概率空间$(\bar{\Omega},\bar{\mathscr{F}},\bar{\mathscr{F}}_t,\bar{P}^\mu)$上,存在$\mathscr{S}'(\mathbb{R})$-值的 Wiener 过程$(W_t,\bar{\mathscr{F}}_t)$及$\bar{\mathscr{F}}_t$-可料(修正)过程 $X_t(x,\omega):[0,\infty)\times\mathbb{R}\times\bar{\Omega}\to[0,\infty)$使得$\forall\ t>0,\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}),P^\mu$-a.s.,

$$\begin{aligned}
&\langle X_t,\phi\rangle - \langle X_0,\phi\rangle \\
&\quad = \int_0^t\int_{\mathbb{R}}\sqrt{X_s(x)}\phi(x)\dot{W}_s(x)dsdx + \int_0^t\langle X_s,\triangle_\alpha\phi\rangle ds.
\end{aligned}$$

证明 由于 X_t 是轨道连续的,所以我们可以假设 $X_t(x)$是$\mathscr{F}_t$-可料的. 设 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$,由定理4.1.2和系3.5.2,

$$M_t(\phi) = \langle X_t,\phi\rangle - \langle X_0,\phi\rangle - \int_0^t\langle X_s,\triangle_\alpha\phi\rangle ds$$

是$(P^\mu,\mathscr{F}_t)$-平方可积鞅,其变差过程为

$$\ll M(\phi)\gg_t = \int_0^t\int_{\mathbb{R}} X_s(x)2c(x)\phi(x)^2dsdx.$$

类似于(Walsh[194]Ch. 2)的讨论,我们可以找到一个正交鞅测度 $M(dsdx)$,其平方变差测度$\ll M\gg(dsdx)=2c(x)X_s(x)dsdx$. 现

在，取与 $X_t(dx)$ 独立的 $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$-值的 Wiener 过程 $\widetilde{W}_t$（若需要我们可以在延拓概率空间上考虑）. 令

$$W_t(\phi)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{X_s(x)}}1_{\{X_s(x)\neq 0\}}\phi(x)M(dsdx)$$
$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}}1_{\{X_s(x)=0\}}\phi(x)\dot{\widetilde{W}}_s(x)dsdx.$$

由此易知，

$$\ll W \gg (dsdx) = 2c(x)dsdx,$$

即 W_t 是 $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$-值的 Wiener 过程（但不一定是标准的），而且

$$M_t(\phi) = \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \sqrt{X_s(x)}\phi(x)\dot{W}_s(x)dsdx, \forall\ \phi \in C_c^\infty.$$

证毕. □

引理9.1.5 对于 $\forall\ t>0$ 和 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$，$P^\mu$-a.s.，

$$\langle X_t,\phi\rangle = \langle X_0,S_t\phi\rangle + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \sqrt{X_s(x)}S_{t-s}\phi(x)\dot{W}_s(x)dsdx. \tag{9.1.7}$$

证明 首先往证对于 $\forall\ \phi,\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$，

$$P^\mu\left\{\langle X_t,\phi\rangle\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \sqrt{X_s(x)}\psi(x)\dot{W}_s(x)dsdx\right\}$$
$$= \int_0^t ds\langle \mu S_s, 2c\psi S_{t-s}\phi\rangle. \tag{9.1.8}$$

由引理9.1.4，上式的左端等于

$$P^\mu\left\{\langle X_t,\phi\rangle\left\{\langle X_t,\psi\rangle - \langle X_0,\psi\rangle - \int_0^t\langle X_s,\triangle_\alpha\psi\rangle ds\right\}\right\}$$
$$= P^\mu\langle X_t,\phi\rangle\langle X_t,\psi\rangle - P^\mu\langle X_t,\phi\rangle\langle X_0,\psi\rangle$$
$$- \int_0^t P^\mu\langle X_t,\phi\rangle\langle X_s,\triangle_\alpha\psi\rangle ds.$$

由系3.5.2及 Markov 性并注意到 $\int_t^s S_r\triangle_\alpha\phi dr = S_s\phi - S_t\phi$，经直接计算可知(9.1.8)成立. 而且对于 $p>0$，该式对于 ϕ,ψ：$\|\phi_p\phi\|,\|\phi_p\psi\|<\infty$ 也成立.

设 $\Gamma=\{0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t\}$ 是$[0,t]$的一个划分，并记 $|\Gamma|$：

$=\max\{t_i-t_{i-1}:1\leqslant i\leqslant n\}$. 于是对于 $\phi\in C_c^\infty,t\geqslant 0$,

$$P^\mu\left(\langle X_t,\phi\rangle\int_0^t\int_R\sqrt{X_s(x)}S_{t-s}\phi(x)\dot{W}_s(x)dsdx\right)$$

$$=\lim_{|\Gamma|\to 0}\sum_{i=1}^n P^\mu\left(\langle X_t,\phi\rangle\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_R\sqrt{X_s(x)}S_{t-t_i}\phi(x)\dot{W}_s(x)dsdx\right)$$

$$=\lim_{|\Gamma|\to 0}\sum_{i=1}^n\left\{P^\mu\left(\langle X_{t_i},S_{t-t_i}\phi\rangle\int_0^{t_i}\int_R\sqrt{X_s(x)}S_{t-t_i}\phi(x)\dot{W}_s(x)dsdx\right)\right.$$

$$\left.-P^\mu\left(\langle X_{t_{i-1}},S_{t-t_i-1}\phi\rangle\int_0^{t_i-1}\int_R\sqrt{X_s(x)}S_{t-t_i}\phi(x)\dot{W}_s(x)dsdx\right)\right\}$$

$$=\lim_{|\Gamma|\to 0}\sum_{i=1}^n\left\{\int_0^{t_i}ds\langle\mu S_s,2cS_{t-s}\phi S_{t-t_i}\phi\rangle\right.$$

$$\left.-\int_0^{t_i-1}ds\langle\mu S_s,2cS_{t-t_i}\phi S_{t-s}\phi\rangle\right\}\quad(\text{由}(9.1.8))$$

$$=\lim_{|\Gamma|\to 0}\sum_{i=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i}ds\langle\mu S_s,2cS_{t-t_i}\phi S_{t-s}\phi\rangle$$

$$=\int_0^t ds\langle\mu S_s,2c(S_{t-s}\phi)^2\rangle.$$

由此可证,

$$P^\mu\left(\langle X_t,\phi\rangle-\langle X_0,P_t\phi\rangle-\int_0^t\int_R\sqrt{X_s(x)}S_{t-s}\phi(x)\dot{W}_s(x)ds\right)^2=0.$$

这就证明了本引理. □

为了说明 $X_t(x)$ 有联合连续修正,我们需要估计 $X_t(x)$ 的高阶矩. 为此对于 $h>0$,记 $v^{(1)}(t,x,h):=p_{t+h}(x)$,

$$v^{(n)}(t,x,h):=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}\int_0^t S_{t-s}(2cv^{(k)}(s,x,h)v^{(n-k)}(t,x,h))ds.\tag{9.1.9}$$

引理9.1.6 对于 $\forall\ n\geqslant 1,p>0,t>0$ 存在常数 $C_{n,p,t}>0$ 使得

$$\langle\mu,v^{(n)}(t,x,h)\rangle\leqslant C_{n,p,t}\phi_p(x)^{-1},\ h>0,\tag{9.1.10}$$

而且 $C_{n,p,t}$ 关于 $t\in(0,\infty)$ 局部有界.

证明 由于 $\mu\in\widetilde{M}$,显然 $\langle\mu,v^{(1)}(t,x,h)\rangle=\langle\mu,p_{t-h}^x\rangle$ 满足 (9.1.10). 假设该式对于 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 成立. 由定义 (9.1.9) 可知,

$$S_u v^{(n)}(t,x,h)\leqslant v^{(n)}(t+u,x,h),\ u\geqslant 0.$$

因此，

$$v^{(n)}(t,x,h)\leqslant 2\|c\|\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}v^{(k)}(t,x,h)\int_0^t\|v^{(n-k)}(s,x,h)\|ds.$$

(9.1.11)

由归纳法，易证存在 $C_{T,n}>0$

$$\|v^{(n)}(s,x,h)\|\leqslant C_{T,n}/t^{\beta},\ \forall\ h>0, 0<t\leqslant T.$$

所以由假设即知(9.1.10)对任意的 n 成立. □

引理9.1.7 对于 $\forall n\geqslant 1, p>0$ 和 $t>0$ 存在常数 $C_{n,p,t}>0$ 使得

$$P^{\mu}(X_t(x))^n\leqslant C_{n,p,t}\phi_p(x)^{-1},(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R},$$

(9.1.12)

其中 $C_{n,p,t}$ 对于任意固定的 $n\geqslant 1, p>0$ 是关于 t 局部有界的.

证明 由定理3.5.7，

$$P^{\mu}(X_t^h(x))^n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\langle\mu,v^{(n-k)}(t,x,h)\rangle P^{\mu}(X_t^h(x))^k$$

由此及 Fatou 引理(令 $h\to 0$)，引理9.1.6可证本引理成立. □

引理9.1.8 固定 $t_0>0$. 对于 $t\geqslant t_0$，取

$$Y_t(x)=\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}}p_{t-s}(y,x)\sqrt{X_s(y)}\dot{W}_s(y)dsdy,$$

则 $\{Y_t(\cdot)\}_{t\geqslant t_0}$ 具有连续修正.

证明 设 $t>s\geqslant t_0$. 由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式(参见[166],p.151)及 Hölder 不等式，

$$\begin{aligned}
&P^{\mu}(Y_t(x)-Y_s(y))^{2n}\\
&\leqslant C_{2n}P^{\mu}\left(\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}}(p_{t-u}(z,x)-p_{s-u}(z,y))^2X_u(z)dudz\right)^n\\
&\leqslant C_{2n}\left(\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}}(p_{t-u}(z,x)-p_{s-u}(z,y))^2dudz\right)^{n-1}\\
&\quad\times\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}}(p_{t-u}(z,x)-p_{s-u}(z,y))^2P^{\mu}(X_u(z))^ndudz,
\end{aligned}$$

其中约定 $p_t(x,y)=0$ 若 $t<0$. 对于 $\forall p>0, T>0$，由引理9.1.1(B1)，(B3)知，存在 $C=C_{T,p}>0$，$\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}}p_s(z,x)^2dz\leqslant C_{T,p}t^{1-\beta}\phi_p(x)^{-1}$，于是

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}}(p_{t-u}(z,x)-p_{s-u}(z,y))^2 dudz$$

$$\leqslant C(|t-s|^{\delta'}+|x-y|^{\gamma})(\phi_p(x)^{-1}+\phi_p(y)^{-1}), \quad (9.1.13)$$

对于$0\leqslant t_0\leqslant t\leqslant T,(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$成立. 其中 $\delta'=\min\{\delta,1-\beta\}$.

另一方面,由引理9.1.7,引理9.1.1(B1),(B3)得,对于 $p>0$

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}}p_{t-u}(z,x)^2 P^{\mu}(X_u(z))^n dudz$$

$$\leqslant \sup_{t_0\leqslant u\leqslant T} C_{n,p,u}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}}p_{t-u}(z,x)^2\phi_p(z)^{-1}dudz$$

$$\leqslant \text{const}\,\phi_p(x)^{-1}.$$

综上所述,存在 $C=C(t_0,T,n,p)>0$,

$$P^{\mu}(Y_t(x)-Y_s(y))^{2n}\leqslant C(|t-s|^{\delta'}+|x-y|^{\gamma})^{n-1}(\phi_p(x)^{-1} + \phi_p(y)^{-1})^n,$$

对于所有 $t_0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 和$(x,y)\in\mathbb{R}^2$成立. 于是当 n 足够大时, Kolmogorov 引理的条件满足,引理证毕. □

定理9.1.2的证明 由于对于 $\phi\in C_0(\mathbb{R}),\|\phi_p^{-1}\phi\|<+\infty$引理9.1.5也成立,所以,对于 $\phi\in C_c^{\infty}(\mathbb{R}),P^{\mu}$-a.s.,

$$\langle X_{t_0},S_{t-t_0}\phi\rangle=\langle X_0,S_t\phi\rangle+\int_0^{t_0}\int_{\mathbb{R}}\sqrt{X_s(x)}S_{t-s}\phi(x)\dot{W}_s(x)dsdx,$$

从而 P^{μ}-a.s.

$$\langle X_t,\phi\rangle=\langle X_{t_0},S_{t-t_0}\phi\rangle+\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}}\sqrt{X_s(x)}S_{t-s}\phi(x)\dot{W}_s(x)dsdx.$$

由随机 Fubini 定理(参见[194],p. 296),我们有,P^{μ}-a.s.

$$X_t(x)=S^*_{t-t_0}X_{t_0}(x)+\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}}p_{t-s}(y,x)\sqrt{X_s(y)}\dot{W}_s(y)dsdy. \quad (9.1.14)$$

由引理9.1.7知,对于固定的 $t_0>0,X_{t_0}(x)$关于 x 具有连续修正. 而引理9.1.8说明了(9.1.14)右边第二项也具有关于$(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$联合连续修正. 这就证明了所要结果. □

注9.1.9 事实上,对于分枝特征为 $\Psi(x,z)=\gamma(x)z^{1+\beta},0<\beta\leqslant1,\gamma(x)$是非负有界函数的情况. Dawson-Hochberg(1979)[25],

Roelly-Coppoletta(1986)[167]在一些特殊情况下也讨论了相应超过程的绝对连续性，更一般的结果由 Fleischmann(1988)[72]给出. 结合有关超过程支撑 Hausdorff 维数的研究，实际上我们有如下的结论：记 X_t 为$(\triangle_\alpha,\Psi)$-超过程. 对于 $\mu\in M_F(\mathbb{R}^d)$，则对于任何的 $t>0$，X_t 是绝对连续的当且仅当 $d<\alpha/\beta$. 该结论的证明概要可参见文献[19]，Th. 8. 3. 1.

对于具有催化剂(即分枝现象只在某些点上发生)的超过程的绝对连续性的研究最早是属于 Dawson-Fleischmann-Roelly (1991)[24]的. 后来 Dawson，Fleischmann 等人又对此进行了一系列的研究. 国内王永进、郭军义等也在该领域有一系列的研究工作，例如，[84]，[203]，[201]和[202]等.

注9. 1. 10 对于一般的 Luzin 空间$(E,\mathscr{E})$，设 $\mathscr{L}$ 是其上的测度. 如果底过程 ξ 相对于 $\mathscr{L}$ 存在转移密度函数，而且它满足条件(B1)－(B3)，那么定理9. 1. 2仍成立，详细证明请参见文献[110].

§9. 2 在空间曲面上的绝对连续性

本节，我们讨论(ξ,Ψ)-超过程在曲面上的绝对连续性. 其中 ξ 为$\mathbb{R}^d$ 上的随机过程，$\Psi(x,z)=c(x)z^2$.

假设 D 是$\mathbb{R}^d$ 上的光滑区域，$\tau=\inf\{t>0,\xi_t\notin D\}$，即过程 ξ_t 首出 D 的时间. 由§3. 6我们可定义随机测度 X_τ 如下：

$$P^\mu\exp\{-\langle X_\tau,f\rangle\}=\exp\langle\mu,-V_f\rangle,f\in pC(\partial D); \tag{9.2.1}$$

$$V_f(x)+E_x\int_0^\tau\Psi(\xi_s,V(\xi_s))ds=E_xf(\xi_\tau), \tag{9.2.2}$$

其中 $C(\partial D)$(相应地 $pC(\partial D)$)表示定义在 ∂D 上的连续函数(相应地非负连续函数). 记 $\pi(dx)$表示 ∂D 上诱导的 Lebesgue 测度.

今设 L 是强椭圆算子，ξ 是 L-扩散过程. 由定义知 X_τ 是 ∂D 上的随机测度. 从后面的讨论将看出，在非线性边值问题的研究中，X_τ 起着重要作用. 因此，对 X_τ 的研究自然成为人们关心的问

题. 在此，我们仅讨论它的绝对连续性. 首先，先对区域作一些限制.

假设9.2.1 以 $G(x,y)$ 和 $K(x,y)$ 分别表示 (L,D) 对应的 Green 函数和 Poisson 函数，即它们由下式决定：

$$\int_D G(x,y)f(y)dy = E_x\int_0^\tau f(\xi_t)dt,\ f\in bC(D),$$

$$\int_{\partial D} K(x,y)f(y)\pi(dy) = E_x f(\xi_\tau),\ f\in bC(\partial D).$$

假定存在常数 C 使得

$$G(x,y)\leqslant C(d(x,\partial D)\wedge d(y,\partial D))g(x,y), \quad (9.2.3)$$

$$K(x,y)\leqslant Cd(x,\partial D)/\|x-y\|^d, d\geqslant 2, \quad (9.2.4)$$

其中，

$$g(x,y)=\begin{cases}\max\{1,\log(1/\|x-y\|)\}, & d=2;\\ 1/\|x-y\|^{d-2}, & d\geqslant 3\end{cases}$$

和 $d(x,\partial D)=\inf\{\|x-z\|, z\in\partial D\}$.

假设9.2.2 存在一列 $\partial D\times\partial D$ 上的连续函数 $\{\rho_n(x,y), n=1,2,\cdots,\}$ 满足

1. 对每一 $n, x\in\partial D, \rho_n(x,y)=0$，若 $y:\|x-y\|\geqslant 1/n$ 且

$$\int_{\partial D}\rho_n(x,y)\pi(dy)=1.$$

2. $\rho_n(x,y)\to\delta_x(y)$ 当 $n\to\infty$ 关于 $x\in\partial D$ 一致，这里 δ_x 是 Dirac-函数.

上述假设对于很多情况都适用. 比如，赵忠信在较广泛的条件下证明了假设9.2.1(参见文献[239]和[240])；当 D 是一致 Lipschitz 区域时，假设9.2.2也成立. 特别地，球上的 Brown 运动满足上述两个假设. 这就说明了我们如下的讨论是有实质内容的.

本节将证明如下定理.

定理9.2.3 设 L 是一致椭圆算子，(L,D) 满足假设9.2.1与假设9.2.2. 若 $\text{supp}(\mu)\subset K\subset D$，$K$ 是 D 的紧子集，则当 $d=2$ 时，P^μ-a.s. $X_\tau(dx)$ 是关于 $\pi(dx)$ 绝对连续的；当 $d\geqslant 3$ 时，若对某 $\varepsilon\geqslant 0$ 及 $C>0$，

$$c(x) \leqslant Cd(x,\partial D)^{d-3+\varepsilon}, \tag{9.2.5}$$

则 P^{μ}-a.s. X_τ 也是关于 $\pi(dx)$绝对连续的. 特别地,若 $\mathrm{supp}(c) \subset K$,上述结论成立.

为证该定理,我们先来看几个引理.

引理9.2.4 设 $f \in C(\partial D)$,$\{V_{\lambda f}\}_{\lambda} > 0$满足

$$V_{\lambda f}(x) + E_x\int_0^\tau \Psi(\xi_s, V_{\lambda f}(\xi_s))ds = E_x\lambda f(\xi_\tau), \tag{9.2.6}$$

则存在常数 c 使得 $V_{\lambda f}(x)$是关于 $\lambda \in [0,c)$无穷可微的.

证明 对于函数 ψ_1, ψ_2,令

$$(\psi_1 * \psi_2)(x) = E_x\int_0^\tau 2c(\xi_s)\psi_1(\xi_s)\psi_2(\xi_s)ds.$$

并记

$$\phi(x) = E_x f(\xi_\tau). \tag{9.2.7}$$

同定理3.5.7之证明,当$|\lambda| < (8\|f\|\|cP.\tau\|)^{-1}$时,方程(9.2.6)的解为

$$V_{\lambda f} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n\phi^{n*}, \tag{9.2.8}$$

其中

$$\phi^{1*} = \phi; \phi^{n*} = \sum_{k=1}^{n-1}\phi^{k*} * \phi^{(n-k)*}, n > 1. \tag{9.2.9}$$

证毕. □

由引理9.2.4,易知

引理9.2.5 若 $\mathrm{supp}(\mu) \subset K \subset D$,对于任何的 $f \in C(\partial D)$,

(i) $P^{\mu}\langle X_\tau, f\rangle = \langle \mu, E.\ f(\xi_\tau)\rangle = \int_{\mathbb{R}^d}\mu(dx)\int_{\partial D}K(x,y)f(y)\pi(dy)$.

(ii)

$$\begin{aligned}P^{\mu}\langle X_\tau, f\rangle^2 &= \langle \mu, E.\ f(\xi_\tau)\rangle^2 + \left\langle \mu, E.\int_0^\tau 2c(\xi_s)(E_{\xi_s}(f(\xi_\tau))^2ds\right\rangle \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d}\mu(dx)\int_{\partial D}K(x,y)f(y)\pi(dy)\right)^2 \\ &\quad + 2\int_{\mathbb{R}^d}\mu(dx)\int_D dyG(x,y)c(y)\end{aligned}$$

$$\times\left(\int_{\partial D}K(y,z)f(z)\pi(dz)\right)^2.$$

定理9.2.3的证明 设 $X_n(x)=\langle X_\cdot,\rho_n(x,\cdot)\rangle$. 由假设9.2.1，9.2.2，它是适定的，而且可断言

$$\int_{\partial D}\pi(dx)P^\mu(X_n(x))^2<\infty,\ n\geqslant 1,\tag{9.2.10}$$

$$\lim_{n\uparrow\infty,m\uparrow\infty}\int_{\partial D}\pi(dx)P^\mu(X_n(x)-X_m(x))^2=0.\tag{9.2.11}$$

据引理9.2.5，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\partial D}P^\mu(X_n(x))^2dx\\&=\int_{\partial D}\pi(dx)\left(\int_{\mathbb{R}^d}\mu(dy)\int_{\partial D}K(y,z)\rho_n(x,z)\pi(dz)\right)^2\\&\quad+2\int_{\partial D}\pi(dx)\int_{\mathbb{R}^d}\mu(dy)\int_D dzG(y,z)c(z)\\&\quad\times\left(\int_{\partial D}K(z,u)\rho_n(x,u)\pi(du)\right)^2\\&\triangleq I_1+I_2.\end{aligned}\tag{9.2.12}$$

既然 $\text{supp}(\mu)\subset K\subset D$，我们可假设 $d(\text{supp}(\mu),\partial D)=a>0$，所以，

$$\begin{aligned}I_1&=\int_{\partial D}\pi(dx)\left(\int_{\mathbb{R}^d}\mu(dy)\int_{\partial D}K(y,z)\rho_n(x,z)\pi(dz)\right)^2\\&<\mu(\mathbb{R}^d)\pi(\partial D)C^2/a^2\quad(\text{由}(9.2.4)),\end{aligned}$$

其最后一项不依赖于 n. 考虑

$$\begin{aligned}I_2&=2\int_{\partial D}\pi(dx)\int_{\mathbb{R}^d}\mu(dy)\int_D dzG(y,z)c(z)\\&\quad\times\left(\int_{\partial D}K(z,u)\rho_n(x,u)\pi(du)\right)^2\\&\leqslant 2\int_{\partial D}\pi(dx)\int_{\mathbb{R}^d}\mu(dy)\int_D dzG(y,z)c(z)\\&\quad\times\int_{\partial D}K(z,u)^2\rho_n(x,u)\pi(du)\\&\qquad(\text{由 Hölder 不等式与假设 9.2.2})\\&\leqslant 2\int_{\partial D}\pi(dx)\int_{\partial D}\pi(du)\int_{\mathbb{R}^d}\mu(dy)\end{aligned}$$

$$\times \int_D G(y,z)c(z)K^2(z,u)\rho_n(x,u)dz.$$

当 $d=2$时，继续上式的计算得

$$\leqslant \text{const}\int_{\partial D}\pi(dx)\int_{\partial D}\pi(du)\rho_n(x,u)$$

$$\times \int_{R^d}\mu(dy)\int_D \max\left\{1,\log\frac{1}{\|y-z\|}\right\}dz$$

$$\leqslant C_1.$$

当 $d\geqslant 3$时，在条件(9.2.4)与假设9.2.1下，

$$I_2\leqslant \text{const}\int_{\partial D}\pi(dx)\int_{\partial D}\pi(du)\rho_n(x,u)$$

$$\times \int_{R^d}\mu(dy)\int_D 1/(\|y-z\|^{d-2}\|z-u\|^{d-\epsilon})dz$$

$$\leqslant C_2, \tag{9.2.13}$$

其中 C_1,C_2都是与 n 无关的常数.

至于(9.2.11)，由引理9.2.5得

$$\int_{\partial D}\pi(dx)P^\mu(X_n(x)-X_m(x))^2$$

$$=\int_{\partial D}\pi(dx)\left[\int_{R^d}\mu(dy)\int_{\partial D}K(y,z)(\rho_n(x,z)-\rho_m(x,z))dz\right]^2$$

$$+2\int_{\partial D}\pi(dx)\int_{R^d}\mu(dy)\int_D dzG(y,z)c(z)$$

$$\left[\int_{\partial D}K(z,u)(\rho_n(x,u)-\rho_m(x,u))\pi(du)\right]^2. \tag{9.2.14}$$

由此及假设9.2.2，类似于(9.2.10)的证明，易证(9.2.11). 而(9.2.10)与(9.2.11)即推出了存在联合可测的函数 $X_\tau(x,\omega)$: $\partial D\times\Omega\to[0,\infty)$满足

$$\int_{\partial D}\pi(dx)P^\mu X_\tau^2(x)<\infty \tag{9.2.15}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\partial D}\pi(dx)P^\mu(X_n(x)-X_\tau(x))^2=0. \tag{9.2.16}$$

而且对于任意 $f\in C(\partial D)$,

$$
\begin{aligned}
&P^\mu|\langle X_\tau,f\rangle-\int_{\partial D}X_\tau(x)f(x)\pi(dx)|^2\\
=&\lim_{n\uparrow\infty}P^\mu|\langle X_n,f\rangle-\int_{\partial D}X_\tau(x)f(x)\pi(dx)|^2\\
\leqslant&\lim_{n\uparrow\infty}\int_{\partial D}P^\mu(X_n(x)-X_\tau(x))^2\pi(dx)\int_{\partial D}f^2(x)\pi(dx)\\
=&0.
\end{aligned}
\tag{9.2.17}
$$

这就证明了定理9.2.3. □

以 $X_\tau(\cdot)$表示 X_τ 相对于 π 的密度，则由上述证明易知，

命题9.2.6

$$P^\mu X_\tau(x)=\int_D\mu(dy)K(y,x),\ x\in\partial D. \tag{9.2.18}$$

证明 由引理9.2.5我们有

$$\langle X_\tau,f\rangle=\int_{\partial D}X_\tau(x)f(x)\pi(dx),\ f\in C_+(\partial D).$$

定理9.2.3表明，

$$\int_{\partial D}P^\mu X_\tau(x)f(x)\pi(dx)=\int_D\mu(dy)\int_{\partial D}K(y,x)f(x)\pi(dx).$$

因而(9.2.18)成立. □

§9.3 在非分枝区域上的绝对连续性

我们曾在本章引言里指出，若没有分枝现象发生，则相应的超过程退化为非随机测度，从数学上讲，这种情况意义不大. 因为人们更关心分枝现象发生的情况. 过去人们的研究总是假定分枝在整个空间上发生. 一个自然的问题是，当分枝仅在局部不发生的时候，超过程又那些不同的性质呢?下面我们来看它的绝对连续性.

同样我们仍考察 $B(A,c)$-超过程$(X_t,t\geqslant0,P^\mu)_{\mu\in M_F(\mathbb{R}^d)}$，这里 A 假设为$\mathbb{R}^d$ 上的强椭圆算子 L 或为 α-稳定过程的无穷小算子$-(-\triangle)^{\alpha/2}(1<\alpha\leqslant2)$. 设 $B=\{x\in\mathbb{R}^d,c(x)=0\}$，即非分枝集合. 我们的兴趣在于 X_t 限制在 B 上的绝对连续性. 以 B^o 表示 B 的内点，以 $X_t|_{B^o}$表示 X_t 在 B^o 上的限制. 我们有如下的结论：

定理9.3.1 假设 $B^o \neq \varnothing$，则对于任意 $d \geqslant 1, \mu \in M_F(E), P^\mu$-a.s.，$X_t|_{B^o}$是关于 Lebesgue 测度绝对连续的.若还有 $\mathrm{supp}(\mu) \subset B^c$，则其 Radon-Nikodym 导数 $X_t(x)$ 关于 $t>0$和 $x \in B^o$ 有联合连续修正.

下面，我们仅对 α-对称稳定过程的无穷小算子来证明该定理，强椭圆算子的情况可类似讨论.

取 $X_t^h(x) = \langle X_t, p_h(\cdot, x)\rangle, t>0$. 由定理3.5.7易证

$$P^\mu(X_t^h(x))^2 < \infty, h > 0;$$

$$\lim_{h\to 0, r\to 0} P^\mu(X_t^h(x) - X_t^r(x))^2 = 0.$$

于是，

$$\lim_{h\to 0}\langle X_t, p_h(x, \cdot)\rangle \xrightarrow{L^2} X_t(x).$$

同定理9.2.3类似讨论，可证 $X_t|_{B^o}(t \geqslant 0)$是绝对连续性的，并且记 $X_t(x)$为其密度. 现往证 $X_t(x)$具有联合连续性.

易知 $X_t(x)$具有任意阶局部有界矩. 注意到 $X_t(x)$是参数为$(d+1)$的随机场. 因此，根据推广的 Kolmogrov 矩准则(参见引理1.8.2)，我们要证：任给$[0, +\infty) \times B^o$ 的紧子集 U，存在正常数 $\alpha_1, \alpha_2, C>0$使得当$(t, x), (s, y) \in U$ 时有

$$P^\mu|X_t(x) - X_s(y)|^{\alpha_1} \leqslant C(|t - s|^{d+1+\alpha_2} + \|x - y\|^{d+1+\alpha_2}). \tag{9.3.1}$$

为此，我们有，

引理9.3.2 假设 $\mathrm{supp}(\mu) \subset B^c$. 对于任意的 $K>1$，存在常数 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$和 $C_1(K), C_2(K)$使得

$$P^\mu|X_t(x) - X_s(x)|^{\alpha_1} \leqslant C_1(K)|t - s|^{d+1+\alpha_2}; \tag{9.3.2}$$

$$P^\mu|X_t(x) - X_t(y)|^{\alpha_1} \leqslant C_2(K)\|x - y\|^{d+1+\alpha_2} \tag{9.3.3}$$

对于$1/K \leqslant s, t \leqslant K, x, y \in B^0 \setminus ((B^0)^c)^{1/K}, \|x\|, \|y\| \leqslant K$ 成立，其中 $A^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d, \inf_{y\in A}\|x - y\| \leqslant \varepsilon\}$.

把引理9.3.2的证明分为如下几个步骤进行. 首先，由定理3.5.7，经初等计算得，

引理9.3.3

$$P^{\mu}|X_t(x)-X_t(y)|^n \leqslant \text{const}(K,n)\|x-y\|^n,\ n\geqslant 1, \mu\in M. \quad (9.3.4)$$

□

其次,我们有

引理9.3.4 设 $Y_t=\int_0^t X_s ds$. 取 $\phi_h(\cdot)=p_h(x,\cdot)$ 并且设 $\text{supp}(\mu)\subset B^c$,则对于 $0\leqslant s,t\leqslant K$, $\|x\|\leqslant K$, $x\in B^c\setminus((B^c)^c)^{1/K}$,

$$P^{\mu}(Y_t-Y_s,-(-\triangle)^{\alpha/2}\phi h)^{2n}\leqslant C(K,n)|t-s|^{2n}, \quad (9.3.5)$$

其中 $C(K,n)$ 与 h 无关.

证明 注意到 $S_t\phi-\phi=\int_0^t S_s L\phi ds$ 及 $p_t(x,y)$ 在 $[0,\infty)\times\{(x,y):\|x-y\|\geqslant 1/K\}$ 中的光滑性. 由条件 $\text{supp}(\mu)\subset B^c$ 以及引理3.5.7和定理4.4.3易证(9.3.5). □

引理9.3.5 在引理9.3.2的假设下

$$P^{\mu}|X_t(x)-X_s(x)|^{2n}\leqslant \text{const}(K,n)|t-s|^{2n}. \quad (9.3.6)$$

证明 对 $\phi(\cdot)=p_h(x,\cdot)$,由定理4.1.2

$$M_t=\langle X_t,\phi\rangle-\langle X_0,\phi\rangle-\int_0^t\langle X_s,L\phi\rangle ds \quad (9.3.7)$$

是连续 P^{μ}-可积鞅,其变差过程为

$$\ll M\gg_t=\int_0^t\langle X_s,2c\phi^2\rangle ds.$$

由 Itô 公式,对 $n\geqslant 1$,我们仍可证

$$M_t^{2n}-n(2n-1)\int_0^t M_s^{2n-2}\langle X_s,2c\phi^2\rangle ds$$

是 P^{μ}-鞅. 因此

$$P^{\mu}M_t^{2n}=n(2n-1)\int_0^t P^{\mu}(M_s^{2n-2}\langle X_s,2c\phi^2\rangle)ds.$$

由 Hölder 不等式,

$$\frac{d}{dt}(P^{\mu}M_t^{2n})=n(2n-1)P^{\mu}(M_t^{2n-2}\langle X_t,2c\phi^2\rangle)$$
$$\leqslant n(2n-1)(P^{\mu}M_t^{2n})^{(2n-2)/2n}(P^{\mu}\langle X_t,2c\phi^2\rangle^n)^{1/n}.$$

同引理9.3.3之证明，在引理9.3.2的条件下，

$$P^{\mu}\langle X_t,2c\phi^2\rangle^n \leqslant \text{const}(K,n)(1+\mu(\mathbb{R}^d))^n,\ n\geqslant 1.$$

所以，

$$\frac{d}{dt}(P^{\mu}M_t^{2n}) \leqslant \text{const}(1+\mu(\mathbb{R}^d))(P^{\mu}M_t^{2n})^{(2n-2)/2n}.$$

由此并注意到 $P^{\mu}M_0^{2n}=0$，

$$P^{\mu}M_t^{2n} \leqslant \text{const}(K,n)(1+\mu(\mathbb{R}^d))^{2n^2}t^n. \tag{9.3.8}$$

由(9.3.7)

$$\begin{aligned} &P^{\mu}|\langle X_t,\phi\rangle - \langle X_0,\phi\rangle|^{2n} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}P^{\mu}|M_t^k\langle Y_t,L\phi\rangle^{2n-k}| \qquad (9.3.9)\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(P^{\mu}M_t^{2n})^{k/2n}(P^{\mu}\langle Y_t,L\phi\rangle^{2n})^{(2n-k)/2n}. \end{aligned}$$

最后，考虑

$$\begin{aligned} &P^{\mu}|\langle X_t,\phi\rangle - \langle X_s,\phi\rangle|^{2n} \\ &= P^{\mu}P^{X_s}|\langle X_{t-s},\phi\rangle - \langle X_0,\phi\rangle|^{2n}(\text{由 Markov 性}) \\ &\leqslant P^{\mu}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(P^{X_s}M_{t-s}^{2n})^{k/2n}(P^{X_s}\langle Y_{t-s},L\phi\rangle^{2n})^{(2n-k)/2n} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(P^{\mu}P^{X_s}M_{t-s}^{2n})^{k/2n}(P^{\mu}P^{X_s}\langle Y_{t-s},L\phi\rangle^{2n})^{(2n-k)/2n} \\ &\leqslant \text{const}(K,n)(t-s)^n(\text{由引理 9.3.4 和(9.3.8)}). \end{aligned} \tag{9.3.10}$$

由于最后一项的常数与 h 无关. 令 $h\to 0$即得所要结果. □

定理9.3.1的证明 由引理9.3.3和引理9.3.4易证引理9.3.2. 这说明了 $X_t(x)$在$(0,\infty)\times B^o$ 的任一紧子集上联合连续，从而在整个集合上联合连续. □

定理9.3.1的一个简单系为

系9.3.6 若 $c(x)=1_{B(0,r)}$, $B(0,r)$是以0为中心以 r 为半径的闭球，则对于 $t>0$, $X_t|_{B(0,r)^c}$是绝对连续的. 而且，若 $\text{supp}(\mu)\subset B(0,r)$，其密度 $X_t(x)$在$(0,\infty)\times B^c(0,r)$上联合连续.

注9.3.7 定理9.3.1的结果不依赖于空间的维数. 无疑地，我们也可对 $\Psi(x,z)=\gamma(x)z^{1+\beta}$, $0<\beta<1$来研究同样的问题. 具体做法可参照文献[73]. 由于此时超过程仅有一阶矩，高阶矩不存在，因此不能够用本节的方法来直接讨论其密度的联合连续性. 但在非分枝区域 B 上，仍可看成二分枝的情况，当然要特别处理.

接下来，我们来进一步诠释注7.1.15，即要说明注7.1.15中所提的两种灭绝性的定义有本质区别. 假设底过程 ξ 是扩散过程，显然有

引理9.3.8 对于 $A,D\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$，若 $\mathscr{L}(A\cap D)>0$，则 $P_x\{\xi_t\in A,\tau_D>t\}>0$, $x\in D$, $t>0$. □

定理9.3.9 设 B 如上所定义，而且具有非空的开子集. 对 $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$并满足 $\mathscr{L}(A\cap B)>0$，则对于 $t>0$, $s\geqslant 0$, $\mu\in M_F(\mathbb{R}^d)$，

$$P^\mu\{X_{t+s}(A\cap B)>0\,|\,X_s(B)>0\}=1.$$

证明 由超过程的分枝粒子系统的逼近构造方法和大数定理可得(详见文献[230])，

$$X_t(A)\geqslant\int_B\mu(dx)P_x\{\xi_t\in A,\tau_B>t\}>0,\text{a.s.}\ (\text{由引理 }9.3.8)$$

再由 Markov 性即得所要结果. □

注9.3.10 设$(E,\mathscr{E})$是 Luzin 空间，$\mathscr{L}$ 是其上的参考测度. 若底过程 ξ 使得引理9.3.8成立，则相应的定理9.3.9也成立.

应用定理9.3.9，我们有

系9.3.11 假设 B 是$\mathbb{R}^d$ 中的连通区域，则对 $\mu\in M(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}$，以正的 P^μ-概率，存在 $t_0\geqslant 0$使得 $B\subset S(X_t)$, $t>t_0$.

证明 定理9.3.9说明了

$$P^\mu\{B\subset\operatorname{supp}(X_{t+s})\,|\,X_s(B)>0\}=1,\ t>0,s\geqslant 0.$$

因此，若 $\mu(B)>0$，则 $B\subset\operatorname{supp}(X_t)$, $t>0$, a.s.-P^μ. 否则，由比较定理，

$$P^\mu\{X_t\text{ 曾负荷 }B\}\geqslant 1-\exp\{-\langle u(x),\mu\rangle\},x\notin B,$$

其中 $u(x)$是满足

$$\begin{cases} Lu(x) - \|\gamma\| u^{1+\beta}(x) = 0, x \in B^c, \\ u|_{\partial B} = \infty, \\ u > 0, u(x) \to 0 (x \to \infty). \end{cases}$$

从而，$P^\mu\{X_t$ 曾负荷 $B\} > 0$. □

由系9.3.11可以看出，按照定义7.1.3，从有限测度出发，具有正 Lebesgue 测度的非分枝区域的超扩散过程是(弱)灭绝的，但以正概率有 $T_e = \infty$.

§9.4 超对称稳定过程占位时的绝对连续性

通过前面各节对绝对连续性的研究，我们已经掌握了一定的研究这类问题的方法与技巧. 现在，我们来看占位时过程的绝对连续性. 对于超 Brown 运动，Sugitani(1987)给出了十分精细的结果. 本节，我们考虑超对称稳定过程的情况，主要目的是展示占位时过程与超过程本身相比，在绝对连续性方面有何异同.

设 X_t 是分枝特征为 $c(x)z^2$ 的 $M_p(\mathbb{R}^d)$-值超 α-对称稳定过程. 其底过程的转移函数仍以 $p_t(x)$ 表示. 记 Y_t 为其占位时过程(定义见§4.5).

我们在第八章详细地讨论过 Y_t 的渐近性质. 关于其绝对连续性，我们有

定理9.4.1 假设 $d < 2\alpha$，$\mu \in M_p(\mathbb{R}^d)$满足

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mu(dy) p_t(x-y) \text{ 关于}(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \text{ 联合连续}. \tag{9.4.1}$$

则存在一簇非负随机变量$\{Y(t,x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d\}$使得如下两个结论 P^μ-a.s. 成立.

1)$Y(t,x)$是关于 $t \geq 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$ 以小于$(2-d/\alpha) \wedge (\alpha - d/2) \wedge 1/2$的阶数联合 Hölder 连续的.

2)对于 $\phi \in C_K(\mathbb{R}^d)$，$t > 0$，$\langle Y_t, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} Y(t,x)\phi(x)dx$.

证明 取 $Y_h(t,x) = \langle Y_t, p_h^\alpha(x - \cdot) \rangle$. 由定理4.4.2与类似于前

几节的方法，我们可证，如果 $\mu \in M_p(\mathbb{R}^d)$ 满足(9.4.1)，则对 $t \geqslant 0$，$x \in \mathbb{R}^d$，

$$\lim_{h \to 0} Y_h(t,x) \stackrel{L^2}{=} Y(t,x). \tag{9.4.2}$$

从而，我们得到了一簇非负随机变量 $\{Y(t,x), t \geqslant 0, x \in R^d\}$，而且不难证明，它满足2).

至于1)，首先可证：对任意固定 $0 < \beta < (2a-d) \wedge 1$，$K > 0$，$n \in \mathbb{N}$，存在常数 $C(K,n,\beta)$ 使得 $0 < s \leqslant t \leqslant K$，$|x|$，$|y| \leqslant K$，

$$P^\mu |Y(t,x) - Y(s,y)|^{2n} \leqslant$$

$$C(K,n,\beta)((t-s)^{((2-d/a) \wedge 1/2)^{2n}} + |x-y|^{n\beta}). \tag{9.4.3}$$

由此及 Kolmogorov 矩条件即得结论1). □

注9.4.2 通过比较§9.1中的结论，占位时过程的绝对连续性对于较高维数仍成立. 结合文献[155]及[29]等中的结果，我们知道占位时过程绝对连续性成立的空间维数只能小于 $2a$.

定理9.4.1包含了 Sugitani(1987)[185]的有关超 Brown 运动的结果. Sugitani 还研究了超 Brown 运动占位时过程其它一些问题，如直线上超 Brown 运动占位时过程的密度函数 $Y(t,x)$ 关于 x 的可微性等. 当然，对于对称稳定过程也可研究同样的问题，或能得到更具意义的结果. 读者不妨一试.

文献评注：§9.1的内容主要参考了文献[110]，但内容是针对超对称稳定过程的，并对分枝率做了简单推广. §9.2，§9.3取材于文献[226]和[230]. §9.4主要结果参考了文献[231]和[185].

第十章　超过程的过分函数与调和函数

过分函数是古典位势理论的一个重要概念. Markov 过程,特别是右过程的过分函数已经有着较为详尽的研究(参见文献[175]). 本章通过对超过程过分函数的研究,首先揭示了超过程的过分函数与底过程的过分函数的关系. 然后,我们给出了一类调和函数的刻划. 最后借此简单讨论了条件超过程.

§10.1　超过程的过分函数

考虑第三章定义的(ξ,κ,Ψ)-超过程 X_t. 其中 $\kappa(ds)=ds$,分枝机制 Ψ 为

$$\Psi_t(x,\lambda)=\frac{1}{2}c(t,x)\lambda^2+b(t,x)\lambda+\int_0^{\infty}(e^{-\lambda u}-1+\lambda u)\nu_t(x,du),\quad(10.1.1)$$

$\lambda\geqslant 0, x\in E$. 在此仅考虑时间齐次的情况,即系数 b,c,及 ν 与时间无关,而底过程也是时间齐次的. 对于非时齐情况可类似讨论. 首先,让我们考察超过程的过分函数与底过程的过分函数之间的关系.

一般 Markov 过程过分函数的定义是

定义10.1.1　设 ξ 是一个 Markov 过程. 对于任何 $\alpha\geqslant 0$,函数 $f\in p\mathscr{B}(E)$称为过程 ξ_t 的 α-**过分函数**,若它满足

(1)$e^{-\alpha t}S_tf\leqslant f, t\geqslant 0$,

(2)$e^{-\alpha t}S_tf\to f$ 当 $t\to 0_+$时逐点收敛.

类似地,对于超过程我们有

定义10.1.2　设 $F:M_F(E)\to\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}$且 $F\in\mathscr{M}_F$(由$M_F(E)$

上弱拓扑产生的 Borel σ-域). 对于超过程 X_t, $\alpha\geqslant 0$, 称 F 是 X_t 的 **α-过分函数**, 如果

(1) $e^{-\alpha t}P^{\mu}F(X_t)\leqslant F(\mu), t\geqslant 0$,

(2) $e^{-\alpha t}P^{\mu}F(X_t)\to F(\mu)$ (当 $t\to 0_+$), $\mu\in M_F(E)$.

以 $\mathscr{S}^{\alpha}(\xi)$ 表示 ξ 的 α-过分函数类, 以 $\mathscr{S}^{\alpha}(X)$ 表示 X 的 α-过分函数类. 我们知道, $\mathscr{S}^{\alpha}(\xi)$, $\mathscr{S}^{\alpha}(X)$ 都是锥集, 即它们关于取小运算"$\wedge$"封闭.

命题10.1.3 设 $l=-\sup_{x\in E}b(x)\vee 0, \alpha\geqslant 0$, 则 $\mathscr{S}^{\alpha}(\xi)$ 可以嵌入到 $\mathscr{S}^{\alpha+l}(X)$. 其嵌入映射为 $f\to\langle f,\cdot\rangle$.

证明 对于 $f\in\mathscr{S}^{\alpha}(\xi)$, 由于允许取无穷值, $F(\cdot):=\langle f,\cdot\rangle$ 总是适定的. 当 f 是有界可测函数时, 由定义10.1.2和定理3.5.1即可证得所要结论. 若 f 无界, 取 $f_n:=f\wedge n$, 那么 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}\subset\mathscr{S}^{\alpha}(\xi)$. 因此, 由已证结论, 若令 $F_n(\mu):=\langle\mu,f\wedge n\rangle$, 我们有

$$e^{-(\alpha+l)t}P^{\mu}F_n(X_t)\leqslant F_n(\mu), t\geqslant 0, \tag{10.1.2}$$

$$\lim_{t\downarrow 0}e^{-(\alpha+l)t}P^{\mu}F_n(X_t)\to F_n(\mu). \tag{10.1.3}$$

由(10.1.2)及单调收敛可知,

$$\lim_{t\downarrow 0}e^{-(\alpha+l)t}P^{\mu}F(X_t)\leqslant F(\mu), t\geqslant 0. \tag{10.1.4}$$

另一方面, (10.1.2)及 Markov 性, $e^{-(\alpha+l)t}P^{\mu}F_n(X_t)$ 关于 t 单调递减, 而 F_n 关于 n 单调递增, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{t\searrow 0}e^{-(\alpha+l)t}P^{\mu}F(X_t) &= \lim_{t\searrow 0}\lim_{n\to\infty}e^{-(\alpha+l)t}P^{\mu}F_n(X_t)\\ &= \lim_{n\to\infty}\lim_{t\searrow 0}e^{-(\alpha+l)t}P^{\mu}F_n(X_t)\\ &= \lim_{n\to\infty}F_n(\mu) = F(\mu).\end{aligned}$$

证毕. □

反过来, 对于给定的 $F\in\mathscr{M}$, 令 $\hat{f}(x)=F(\delta_x)$, 则易知 $\hat{f}$ 是可测的. 这时我们有,

命题10.1.4 假设 b 是常数, $\beta\geqslant 0\vee b$. $F(\cdot)=\langle\hat{f},\cdot\rangle$, 其中 $\hat{f}\in\mathscr{B}_+$. 如果 $F\in\mathscr{S}^{\beta}(X)$, 则 $\hat{f}\in\mathscr{S}^{\beta-b}(\xi)$.

证明 同命题10.1.3的证明即得. □

上述两个命题说明了超过程的过分函数与底过程过分函数之间的一种关系，而且超过程的过分函数类一般要比底过程的过分函数类大. 因为，除了线性过分函数外，超过程还有非线性的过分函数. 例如，设 $f\in\mathscr{S}^{\alpha}(\xi)$，

$$f\rightarrow F_f(\mu)=\log(1+\langle f,\mu\rangle),\mu\in M.$$

易证，$F_f\in\mathscr{S}^{\alpha+l}(X)$. 一般地，显然我们有

命题10.1.5 假设 $g:\mathbb{R}_+^1\rightarrow\mathbb{R}_+^1$ 是单增、上凸 Borel 可测函数，即满足如下不等式：

$$g(c_1x+c_2y)\geqslant c_1g(x)+c_2g(y),\ 0\leqslant c_1+c_2\leqslant 1. \tag{10.1.5}$$

则在命题10.1.3的相同条件下，若 $f\in\mathscr{E}\mathscr{F}^{e}(\xi)$，那么 $g(\langle f,\cdot\rangle)\in\mathscr{M}$，$g(\langle f,\cdot\rangle)\in\mathscr{S}^{\alpha+l}(X)$.

过分函数的一种特殊情况是不变函数. 它的定义为

定义10.1.6 对于 $\alpha\geqslant 0$，$F:M_F(E)\rightarrow\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}$，且 $F\in\mathscr{M}_F$. 称 F 是 X_t 的 α-**不变函数**，如果 $P^{\mu}e^{-\alpha}F(X_t)\leqslant F(\mu)$，$t\geqslant 0$.

我们知道，当一个过程保守时，任何非负常数是该过程的不变函数. 同理，由于我们讨论的超过程也是保守的，因此，非负常数也是超过程的不变函数. 类似于前面讨论，我们也有

命题10.1.7 在命题10.1.4的假设下，若 f 是 ξ 的 $(\beta-b)$-不变函数，则 $F(\cdot)=\langle f,\cdot\rangle$ 是 X 的 β-不变函数.

本命题给出了线性不变函数的构造. 更一般的问题是不变函数如何刻划. 显然，这不是一个容易回答的问题，下一节对此将着重讨论.

§10.2 超过程的调和函数

我们将着重研究超过程的调和函数及其应用. 超过程的调和函数已经越来越多地受到人们的关注. 特别地，它是进一步研究条件超过程的基础，而且与非线性微分方程也有密切联系. 到目前为止，国际上有关的研究已经不少，如文献[168]，[63]，[64]，[65]，

[149]和[150]等等. 国内也有一些专门的工作如[228]及[211]等等,但仍有不少问题有待研究. 下面我们考虑二分枝超过程的调和函数的刻划. 假设其分枝机制为 $\Psi(x,z)=\gamma(x)z^2$.

设 $(\xi_t,\Pi_x)_{x\in E}$ 是一个 Feller 过程,对应的无穷小算子记作 $(A, D(A))$,满足(1) $D(A)$ 是 E 上连续函数空间的稠子集;(2)对于任何的 $f\in D(A)$, $Af:=\lim_{t\downarrow 0_+}(\Pi_x f(\xi_t)-f(x))/t$ 关于 x 逐点存在且为 E 上的连续函数.

考虑取值于 $M_F(E)$ 的测度值分枝过程 (X_t,P^μ),其 Laplace 泛函是

$$P^\mu\exp\{-\langle X_t,f\rangle\}=\exp\{-\langle \mu,V_tf\rangle\},\mu\in M,f\in pC(E), \tag{10.2.1}$$

$$V_tf(x)+\int_0^t \Pi_x\gamma(\xi_s)V_{t-s}^2f(\xi_s)ds=\Pi_xf(\xi_t), \tag{10.2.2}$$

其中 γ 是非负有界连续常数.

调和函数的一个自然定义是

定义10.2.1 设 $F(\mu)$ 是 $(M,\mathscr{M})$ 上的可测函数. 称它是 X_t 的**调和函数**,如果对于任意的具有紧支集的初始测度 $\mu\in M$, $F(X_t)$ 是一个 P^μ-局部鞅.

注10.2.2 显然,这时定义的调和函数(非负)是上一节中提到的不变函数. 这里的定义与吴荣、杨春鹏对于超扩散过程通过首出集合分布定义调和函数的方式不太相同. 一方面我们从古典分析的意义出发,调和函数在相应极小生成算子的作用下为零. 相比较而言,这里的定义更直接;另一方面是为了我们后面定义条件过程的需要. 我们以后将会发现,这两种定义在一定条件下是一致的. 特别值得注意的是在定义中,我们强调初始测度具有紧支撑集,这是为了让定义有较大的适用范围(参见(10.2.5)).

我们知道,在实际研究过程中,我们能够处理的是具有某种解析表达式的 $\mathscr{M}$-可测函数 $F(\mu)$. 而通常考虑的是 $F(\mu)$ 可以写成 $\phi(\langle\mu,f\rangle)$ 的形式,其中 $\phi\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$, $f\in\mathscr{B}(E)$.

具体到本章的假定,定理4.1.2可重写为

引理10.2.3 超过程$\{X_t,P^\mu\}$($\mathrm{supp}(\mu)$是紧集)是如下鞅问题的唯一解：

(1)$P^\mu(X_0=\mu)=1$；

(2)对于任何形如$F(\mu)=\phi(\langle\mu,f\rangle)$，$\phi\in C^2(\mathbb{R})$，$f\in D(A)$的可测函数，

$$F(X_t)-F(X_0)-\int_0^t \mathscr{G}F(X_s)ds \qquad (10.2.3)$$

是一个P^μ-局部鞅. 这里$\mathscr{G}$称为超过程的**无穷小算子**，定义如下

$$\mathscr{G}F(\mu)=\phi'(\langle\mu,f\rangle)\langle\mu,Af\rangle+\phi''(\langle\mu,f\rangle)\langle\mu,\gamma f^2\rangle. \qquad (10.2.4)$$

由该引理及一般Markov过程的位势理论，调和函数与过程的生成元有密切的联系. 因此，对于$F(\mu)=\phi(\langle\mu,f\rangle)$，首先需要研究测度泛函方程：

$$\begin{aligned}\mathscr{G}F(\mu)&=\phi'(\langle\mu,f\rangle)\langle\mu,Af\rangle+\phi''(\langle\mu,f\rangle)\langle\mu,\gamma f^2\rangle\\&=0,\mu\in M(f),\end{aligned} \qquad (10.2.5)$$

其中$M(f):=\{\mu\in M$，使得$\langle\mu,|Af|\rangle<\infty$及$\langle\mu,f^2\rangle<\infty\}$. 显然，当$\mu$的支撑集为紧集时，$\mu\in M(f)$.

在本节剩下部分，我们通过解如上的一类测度泛函方程，给出一般条件下时间齐次超过程调和函数的一个分类定理. 利用该定理我们得到超扩散过程存在非负调和函数的一个判别准则.

10.2.1 一类测度泛函方程

考虑泛函方程(10.2.5). 对于测度泛函形式方程，我们没有现成的理论或方法可以借鉴. 一般来说没有好的普适方法解测度泛函方程. 但值得庆幸的是方程(10.2.5)可以通过一定的技巧给出其解的形式. 本节的主要结果是

定理10.2.4 对于形如$F(\mu)=\phi(\langle\mu,h\rangle)$，$\phi\in C^2(\mathbb{R})$，$h\in D(A)$的函数，如果满足(10.2.5)，则它必为如下两种形式之一：

(i)存在常数C_1,C_2，

$$F(\mu)=C_1\langle\mu,h\rangle+C_2, \qquad (10.2.6)$$

其中 h 是底过程 ξ_t 的调和函数，即满足 $Ah\equiv 0$.

(ii)存在常数 C_1, C_2,

$$F(\mu) = C_1\exp\{-\alpha\langle\mu,h\rangle\} + C_2, \qquad (10.2.7)$$

其中 α 是一个非零常数，而 h 满足

$$Ah(x) = \alpha\gamma(x)h^2(x), x \in E. \qquad (10.2.8)$$

证明 分情况而证之.

情况1. $Ah\equiv 0$. 此时若 $h\equiv 0$，则自然归结为形式(i). 现设 $h\not\equiv 0$. 那么 $M_+ := \{\mu\in M_h; \langle\mu,h\rangle>0\}$ 或 $M_- := \{\mu\in M_h; \langle\mu,h\rangle<0\}$ 至少有一个集合不空. 由于这两个集合都是锥集(即任两个元素的正线性组合仍属于该集合)，所以若 M_+ 不空，对于任一 $\mu_0\in M_+$，令 $c := \langle\mu_0,h\rangle>0$ 则有 $\mu=\lambda\mu_0\in M_+, \lambda>0$，而且 $\langle\mu,h\rangle=\lambda c$. 注意到 $\langle\mu_0,h^2\rangle>0$，由(10.2.5)知，$\phi''(\lambda)=0, \lambda>0$. 即 $\phi(\lambda)=C_1\lambda+C_2, \lambda\geqslant 0$. 同样，若 M_- 不空，我们也可得出 $\phi(\lambda)$ 对于 $\lambda\leqslant 0$ 有同样的形式. 再由 ϕ 的连续可微性，即知无论何种情况，都可把 $F(\mu)$ 归结为(10.2.6)的形式.

情况2. 存在某常数 $\alpha\neq 0$ 使得 $Ah=\alpha\gamma h^2, h\not\equiv 0$. 方程(10.2.5)化为

$$(\alpha\phi'(\langle\mu,h\rangle) + \phi''(\langle\mu,h\rangle))\langle\mu,\gamma h^2\rangle = 0. \qquad (10.2.9)$$

由于 $h\not\equiv 0$，则同情况(i)的讨论知，可得方程

$$\alpha\phi'(\lambda) + \phi''(\lambda) = 0. \qquad (10.2.10)$$

当 M_+ 不空时对于 $\lambda>0$ 成立，或当 M_- 不空时对于 $\lambda<0$ 成立. 如果两者皆不空，则对于所有的 $\lambda\in\mathbb{R}$ 成立. 解方程(10.2.10)即得，$\phi(\lambda)=C_1e^{-\alpha\lambda}+C_2$. 这就是说，$F(\mu)$ 具有形式(ii).

情况3. 其它情况. 换句话说，

即对于任何的实数 $\alpha, Ah\not\equiv\alpha\gamma h^2$, $h\not\equiv 0$. $\qquad$ (10.2.11)

这时我们仅需证明(10.2.5)除常数外无解. 采用反证法. 假设存在 $\mathbb{R}$ 上的二次连续可微函数 $\phi, \phi'\not\equiv 0$ 及 $0\not\equiv h\in D(A)$ 使得方程(10.2.5)成立. 任取一个常数 $\beta\neq 0$，令

$$M_\beta := \{\mu\in M_h, \langle\mu,h\rangle = \beta\}.$$

首先，显然存在 β 使得 M_β 不空，而且，若存在 $\beta_0>0$ 使得 M_{β_0}

$\neq\varnothing$，则对于所有的 $\beta>0, M_\beta\neq\varnothing$. 这是因为，若 $\mu\in M_{\beta_0}$，则，$\frac{\beta}{\beta_0}\mu \in M_\beta$. 同理可证若存在 $\beta_0<0, M_{\beta_0}\neq\varnothing$，则 $M_\beta\neq\varnothing, \forall\ \beta<0$.

其次，对于不空的 M_β，必存在 $\mu_1,\mu_2\in M_\beta, \mu_1\neq\mu_2$. 实际上，由于 $h\in D(A), h\not\equiv 0$，则 $\mathrm{supp}(h):=\{x\in E, h(x)\neq 0\}$ 不空. 由 h 的连续性，则必存在 $x_1,x_2\in\{x\in E, h(x)\neq 0\}, x_1\neq x_2$. 取 $\mu_x=\frac{\beta}{h(x)}\delta_x, x\in\mathrm{supp}(h)$，其中 δ_x 表示单位单点测度，即

$$\delta_x(B)=\begin{cases}1, & \text{如果 } x\in B,\\ 0, & \text{如果 } x\notin B,\end{cases}\quad B\in\mathscr{E}.$$

易知 $\mu_x\in M_\beta$.

再次，M_β 是一个凸集. 即若 $\mu_1,\mu_2\in M_\beta, a\mu_1+(1-a)\mu_2\in M_\beta$, $a\in[0,1]$.

令

$$\overline{M}_+=\{\mu\in M_h, \langle\mu,h\rangle>0\},$$
$$\overline{M}_0=\{\mu\in M_h, \langle\mu,h\rangle=0\},$$
$$\overline{M}_-=\{\mu\in M_h, \langle\mu,h\rangle<0\}.$$

显然，$\overline{M}_+\cup\overline{M}_0\cup\overline{M}_-=M_h$. 若 $\overline{M}_-=\varnothing$，则我们仅需考虑 $\phi(\beta)$, $\beta>0$. 由于我们假设 $F(\mu)$ 不是常数，那么 $\phi'\not\equiv 0$，从而存在 $\beta>0$ 使得 $\phi'(\beta)\neq 0$ 并且 $M_\beta\neq\varnothing$. 对于任意的 $\mu\in M_\beta$，我们有

$$\langle\mu,Ah\rangle\phi'(\beta)+\gamma\langle\mu,h^2\rangle\phi''(\beta)=0. \qquad (10.2.12)$$

这意味着

$$\langle\mu,\phi'(\beta)Ah+\phi''(\beta)\gamma h^2\rangle=0,\ \mu\in M_\beta. \quad (10.2.13)$$

注意到对于所有的 $x:h(x)\neq 0$，上面定义的 $\mu_x\in M_\beta$，所以

$$\phi'(\beta)Ah(x)+\phi''(\beta)\gamma(x)h^2(x)=0,\ x\in\mathrm{supp}(h).$$

从而由 Ah 及 h 的连续性则有

$$\phi'(\beta)Ah+\phi''(\beta)\gamma h^2\equiv 0.$$

这与前提假设(10.2.11)矛盾.

同理可证对 $\overline{M}_+=\varnothing$，以及 $\overline{M}_+\neq\varnothing$ 和 $\overline{M}_-\neq\varnothing$ 也有相同的结论成立.

注10.2.5 定理10.2.4的证明实际上归结为寻找一对满足

(10.2.5)的$(\phi,h)\in C^2(\mathbb{R})\times D(A)$. 如果仅仅考虑$\phi$,我们很容易得到所要形式. 另外,在证明中,我们用到了Ah及h的连续性,但这些条件似乎可以减弱.

10.2.2 超过程调和函数的一个分类定理

假设$F(\mu)$形式如前. 由引理10.2.3易知,

命题10.2.6 若$F(\mu)$满足方程(10.2.5),则它是超过程X_t的调和函数.

反过来,若$F(\mu)$是调和函数,一个自然的问题是它是否满足方程(10.2.5). 显然我们需要对$F(\mu)$适当加一些条件. 这时,我们有

命题10.2.7 设$F(\mu)=\phi(\langle\mu,f\rangle)$,$\phi\in C^2(\mathbb{R})$,$f\in D(A)$. 如果$F(\mu)$是调和函数,则它满足方程(10.2.5).

证明 若$F(\mu)$是调和函数,由引理10.2.3可知,对于任何的具有紧支集的μ,

$$N_t:=\int_0^t[\phi'(\langle X_s,f\rangle)\langle X_s,Af\rangle+\phi''(\langle X_s,f\rangle)\langle X_s,\gamma f^2\rangle]ds$$

也是P^μ-局部鞅,但它又是一个连续的变差过程,因此$N_t=0,\forall t>0$. 从而几乎所有的$t\in(0,+\infty)$,

$$\phi'(\langle X_t,f\rangle)\langle X_t,Af\rangle+\phi''(\langle X_t,f\rangle)\langle X_t,\gamma f^2\rangle=0. \tag{10.2.14}$$

由定理4.3.2,我们知道X_t在弱拓扑意义下是轨道连续的. 注意到对于具有紧支集的初始测度$\mu\in M(f)$,$\{\nu\in M,\langle\nu,f^2\rangle\in(\langle\mu,f^2\rangle-\varepsilon,\langle\mu,f^2\rangle+\varepsilon)\}$是$M$中的开集. 于是,在式(10.2.5)中令$t\downarrow 0^+$,则得(10.2.5). □

联合定理10.2.4,命题10.2.6及命题10.2.7则有

定理10.2.8 超过程X_t的形如$F(\mu)=\phi(\langle\mu,h\rangle)$,$\phi\in C^2(\mathbb{R})$,$h\in D(A)$之调和函数可表示为定理10.2.4中的两种情况之一.

特别地,应用上述定理于超扩散过程,我们有

定理10.2.9 设

$$L = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

是强椭圆偏微分算子. $a_{ij}, b_i (i,j=1,\cdots,d)$是属于 $C^{0,\beta}(\mathbb{R}^d)(\beta>0)$ 的有界函数,而且存在一个正常数 $c>0$使得

$$\sum a_{ij} u_i u_j \geqslant c \sum u_i^2$$

对于所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 及 $u_1, u_2, \cdots, u_d$ 成立. 设 X_t 是相应的超扩散过程. $F(\mu)=\phi(\langle\mu,h\rangle), \phi \in C^2(\mathbb{R}), h \in D(A)$. 其中对于某非负常数 α 及 $\inf_{x\in\mathbb{R}^d}\gamma(x)>\gamma_0>0$, h 是满足(10.2.8)的非负函数. 若 F 是超扩散过程 X_t 的调和函数,则

$$F(\mu) = \langle\mu, C_1\rangle + C_2, \tag{10.2.15}$$

其中 C_1, C_2是任意常数.

证明 由定理10.2.4知, $F(\mu)$具有形式(i)或(ii). 当取形式(i)时,则知在$\mathbb{R}^d$ 中, $Lh(x)\equiv 0$. 又由 h 非负性及古典分析的理论知 h 恒为某一非负常数. 这就证明了 F 具有形式(10.2.15).

另一方面,若 F 具有形式(ii), h 非负并满足(10.2.8),而且 α 是一正常数时,则有 $h\equiv 0$. 事实上,由于 $u(x)=\lambda(R^2-r^2)^{-2}$满足: $\lim_{x\to a, x\in U} u(x)=\infty, a\in\partial$,而且 $Lu(x)-\alpha\gamma(x)u^2(x)\leqslant 0, x\in U$,其中 $U=\{x: |x-x_0|<R\}, r=|x-x_0|, \lambda=C(1\vee R)^3$. 这里 C 是依赖于空间维数 d,扩散系统在U 中的上界以及 α 的常数. 于是再由极大值原理(参见引理11.1.1),我们把问题限制在 U 上,则有对于任意的 $x\in\mathbb{R}^d$,存在足够大的 R 使得 $x\in U$,而且

$0\leqslant h(x)\leqslant u(x)\leqslant C(1+R)^3(R^2-|x-x_0|^2)^{-2}\to 0(R\to+\infty)$,

即 $h\equiv 0$. □

注10.2.10 定理10.2.9告诉我们一个与线性算子情况相类似的结果. 这说明了某些超扩散过程调和函数的"平凡性". "平凡性"并不意味着不重要. 倘若所有非负调和函数都如定理10.2.9所述,则结果很完美,求之不得,也说明了我们没有再深入研究该问题的必要. 但事实并非如此. 实际上即使在非负前题下仍有不平凡的调和函数存在. 为此,我们可以找到一个不恒为零的函数 u 满足(10.2.8)(当然这时 $\alpha<0$). 事实上,由[152]及其中的参考文献

[10,11],可知这样的解存在. 一般地,满足(10.2.8)的非平凡解有很多个,但如何找出这些解,仍是一个大问题. 而对于一般的时齐马氏过程,我们则可期望更丰富的内容. 比如,如何从中找出一类具体超 Markov 过程的调和函数就是一个有意义的问题.

注10.2.11 值得一提的是,在(10.2.8)式中我们没有要求 $\alpha=\gamma$,所以定理的结果推广了在[149](在非时-空情形)、[228]与[211]等中的结果.

当然我们可以设想更一般的调和函数,甚至是空-时调和函数(参见[149]),但由于情况很复杂,目前仅停留在形式上的定义和几个简单例子上,有关理论几乎是空白. 无疑这些方面是值得进一步探讨的研究课题. 限于篇幅,简单讨论如下.

命题10.2.12 设

$$F(\mu)=\phi(\langle\mu,h_1\rangle,\cdots,\langle\mu,h_n\rangle),\phi\in C^2(\mathbb{R}^n),h_i\in D(A),$$

$i=1,2,\cdots,n$. 若它是调和函数,则

$$\sum_{i=1}^{n}\phi_i(\langle\mu,h_1\rangle,\cdots,\langle\mu,h_n\rangle)\langle\mu,Ah_i\rangle + \sum_{i,j=1}^{n}\phi_{ij}(\langle\mu,h_1\rangle,\cdots,\langle\mu,h_n\rangle)\langle\mu,\gamma h_ih_j\rangle=0, \quad (10.2.16)$$

$\mu\in M_{h_i},i=1,2,\cdots,n$.

证明 由鞅性(10.2.3)及 Itô 公式即知. □

由于调和函数的线性组合仍是调和函数,所以 n 个形如定理10.2.8中的调和函数的线性组合便给出满足(10.2.16)的一些例子. 除此之外,还有没有别的调和函数呢?当然有!例如,$n=2$时不难验证,

命题10.2.13

$$F(\mu)=\langle\mu,h\rangle(C_1/\langle\mu,1\rangle+C_2) \quad (10.2.17)$$

是 X_t 的调和函数. 其中 h 是底过程的调和函数,C_1,C_2是任意常数.

自然地,我们相信还有很多其它形式的调和函数,但研究一般情况有一定的难度,也是一个有意义的问题.

§10.3 条件超过程

整个空间上的条件测度值过程已有一些研究，例如文献[168]，[63]，[64]，[65]，[149]，[150]和[199]等等．但真正有实质内容的理论并不多．主要是因为对于一般的随机过程，要么我们对它了解的很不够，使得不能够得到比较深刻的结果（比如，一般 Markov 过程）；要么我们对某些过程知道得很多，但整个空间上的非负调和函数很少（比如$\mathbb{R}^d$上的 Brown 运动）；或我们对超过程了解的很不够（参见定理10.2.9及其后的注），使得研究对象有限．因此，正如经典条件过程的理论一样，我们更感兴趣的是区域上的条件超过程．

10.3.1 条件超过程的定义

为此，我们需要对区域上超过程的调和函数有一个比较全面的认识．吴荣－杨春鹏(1996)在[211]中给出了一系列的结果．区域上是否仍有同整个空间上类似的分类定理，仍是一个有趣的开问题．不论结果如何，已有的结论为我们提供了两类可以考虑的超调和函数．

下面我们假设 $E=\mathbb{R}^d$，底过程为 L-扩散过程，即 $A=L$，L 如定理10.2.9所定义．首先回顾区域上超扩散过程的理论．

设 D 是 E 中区域，令 $\tau_D=\inf\{t>0,\xi_t\notin D\}$．在§3.6，我们构造了 X_{τ_D}，并由(3.6.2)知其 Laplace 泛函是

$$P^\mu\exp\{-\langle X_{\tau_D},f\rangle\}=\exp\{-\langle Vf,\mu\rangle\},\tag{10.3.1}$$

其中 $Vf=\widetilde{V}_0f$，而 $\widetilde{V}_s$ 满足

$$\widetilde{V}_rf(x)+\Pi_{r,x}\int_r^{\tau D}\gamma(\xi_s)[\widetilde{V}_s]^2(\xi_s)ds=\Pi_{r,x}f(\xi_{\tau_D}).\tag{10.3.2}$$

由(10.3.1)，我们知道

引理10.3.1 X_{τ_D}是无穷可分的．

固定区域 $D\subset\mathbb{R}^d$，并简记 τ_D 为 τ.

引理10.3.2 如果(i) $F(\mu)=C_1\langle\mu,h\rangle+C^2$，常数 $C_1,C_2\geqslant0$，h：$Ah(x)=0,x\in D$，或(ii)存在常数 $\alpha\geqslant0$，使得 $F(\mu)=C_1\exp\{-\alpha\langle\mu,u\rangle\}+C_2$，$u$ 满足

$$Lu(x)=\alpha\gamma(x)u^2(x),x\in D, \tag{10.3.3}$$

其中 D 是正则区域. 则对于 $\mu\in M(D)$ 且具有紧支撑，$F(X_{t\wedge\tau})$ 关于 $\mathscr{G}_{\leqslant t\wedge\tau}$ 是 P^μ-(局部)鞅. 其中 $M(D)$ 表示 D 上的有限 Radon 测度的全体.

证明 往证，对于任意的 $B\in\mathscr{G}_{s\wedge\tau}$，$s<t$，$P^\mu 1_B F(X_{t\wedge\tau})=P^\mu 1_B F(X_{s\wedge\tau})$. 往如果(i)成立，由特殊 Markov 性(见定理3.6.3)可知

$$\begin{aligned}P^\mu 1_B F(X_{t\wedge\tau})&=P^\mu 1_B P^{X_{s\wedge\tau}}F(X_{t\wedge\tau})\\&=P^\mu 1_B(C_1\langle X_{s\wedge\tau},h\rangle+C_2).\end{aligned} \tag{10.3.4}$$

上面最后一个等式可由超过程之临界分枝粒子系统逼近构造(见§3.2)和 h 是底过程的调和函数经计算直接得到，详情从略.

若(ii)成立，若 $\alpha=1$ 以及 u 在 $\overline{D}$ 上连续，满足方程

$$\begin{cases}Lu(x)=\gamma(x)u^2(x), & x\in D;\\ u(x)=f(x), & x\in\partial D\end{cases} \tag{10.3.5}$$

的解可唯一地表示为

$$u(x)=-\log P^{\delta_x}\exp\{-\langle X_\tau,f\rangle\}$$

(见定理11.2.1). 由此容易验证(10.3.3)的解可以表示为

$$\tilde{u}(x)=-\frac{1}{\alpha}\log P^{\delta_x}\exp\{-\langle X_\tau,u\rangle\}. \tag{10.3.6}$$

它的边值为 $\tilde{u}(x)|_{\partial D}=\dfrac{1}{\alpha}f$. 一般地，满足(10.3.3)的解不一定能够连续延拓到 $\overline{D}$，但是，我们可以先考虑 D 的子区域，再用子区域逼近的方法. 所以不失一般性，假设(10.3.3)的解在整个区域上连续.

注意到方程(10.3.3)与方程(10.3.5)解之间的关系，我们可证 $F(X_{t\wedge\tau})$ 是鞅. 实际上，若记方程(10.3.3)一个解 u 的有界非负连续边值为 f，由(10.3.6)可知，

$$u(x)=-\frac{1}{\alpha}\log P^{\delta_x}\exp\{-\langle X_\tau,|\alpha|f\rangle\}. \qquad (10.3.7)$$

为证我们的结论，仅需考虑 $F(\mu)=\exp\{-\alpha\langle\mu,u\rangle\}$的情况. 由 X_τ 的无穷可分性及 P^μ 关于 μ 的连续性，我们有

$$\langle\mu,-\log P^{\delta}\cdot e^{-\langle X_\tau,f\rangle}\rangle=-\log P^{\mu}e^{-\langle X_\tau,f\rangle},\mu\in M, \qquad (10.3.8)$$

于是

$$\begin{aligned}P^{X_{s\wedge\tau}}F(X_{t\wedge\tau})&=P^{X_{s\wedge\tau}}\exp\{-\alpha\langle X_{t\wedge\tau},u\rangle\}\\&=P^{X_{s\wedge\tau}}\exp\{\log P^{X_{t\wedge\tau}}e^{-\langle X_\tau,|\alpha|f\rangle}\}\\&\qquad(\text{由}(10.3.7)\text{及}(10.3.8))\\&=P^{X_{s\wedge\tau}}P^{X_{t\wedge\tau}}e^{-\langle X_\tau,|\alpha|f\rangle}\\&=P^{X_{s\wedge\tau}}e^{-\langle X_\tau,|\alpha|f\rangle}\\&=F(X_{s\wedge\tau})(\text{特殊 Markov 性}).\end{aligned}$$

证毕. □

注10.3.3 引理中的情形(i)对于更一般的底过程和较一般的分枝特征 $\gamma(x)z^{1+\beta},0<\beta\leqslant1$结论也成立.

有了上述准备，假设 $H(\mu)$是 $X_{t\wedge\tau}$非负调和函数. 令 $Z(H)=\{\mu\in M,H(\mu)=0\}$. 类似于经典条件过程的理论，定义 Dood 条件过程(H-超过程)$\{X_{t\wedge\tau},P^{H,\mu}\}_{t\geqslant0}$:

$$P^{H,\mu}F(X_{t\wedge\tau}):=H^{-1}(\mu)P^{\mu}F(X_{t\wedge\tau})H(X_{t\wedge\tau}),\mu\notin Z(H). \qquad (10.3.9)$$

换句话说，上式重新赋予轨道空间$[0,\infty)\to M(\overline{D}):t\to X_{t\wedge\tau}$一个新的概率测度. 为说明在这新的概率下它仍是一个 Markov 过程，根据[36]的条件过程理论，唯一的障碍是 H 的零点 $Z(H)$. 而 $Z(H)$ 一般非空，这与经典条件过程理论要求调和函数严格正不相符合. 然而值得庆幸的是我们有

定理10.3.4 若 $\mu\notin Z(H)$，则 $P^{H,\mu}\{X_{t\wedge\tau}\in Z(H),\exists\ t\geqslant0\}=0$.

证明 由定义易知，若 $\mu\notin Z(H)$，对于固定的 $t\geqslant0$，

$$P^{H,\mu}\{X_{t\wedge\tau}\in Z(H)\}=0.$$

假设结论不成立，注意到，$X_{t\wedge\tau}$轨道的(右)连续性. 由截口定理(见何声武等(1995)[88])知，存在一个(可选)可料 $\mathcal{G}_{\leq t\wedge\tau}$-停时 T，使得 $P^{H,\mu}(H(X_{T\wedge\tau})=0,T<\infty)>0$. 从而易知存在充分大 t_0使得

$$
\begin{aligned}
0 &< P^{H,\mu}(H(X_{T\wedge\tau}) = 0, T < t_0) \\
&= H^{-1}(\mu)P^{\mu}\{H(X_{t_0\wedge\tau}), H(X_{T\wedge\tau}) = 0, T < t_0\} \\
&= 0(\text{由 } H(X_{t\wedge\tau}) \text{ 是(右) 连非负 } P^{\mu}\text{- 鞅}).
\end{aligned}
$$

矛盾！于是即知要证结论成立. □

注10.3.5 特别地，当 D 是全空间，$H(\mu)=\langle\mu,1\rangle$时，此命题即推出，$P^{H,\mu}$-a.s. $X_t\notin Z(H)=\{0\}$，即永不灭绝. 因此定理10.3.4蕴含了 Evans，Roelly-Rouault 等人的结果.

当然我们也可以直接从过程逼近的观点给出条件测度值分枝过程的构造，因篇幅所限在此不再赘述. 值得一提的是我们这里定义的条件过程其讨论内容要比在整个空间上丰富得多. 对此我们不难从(条件)超 Brown 运动的特例看出.

10.3.2 条件超扩散过程的 Laplace 泛函

上节定义了区域 D 上的条件过程. 我们来看它的 Laplace 泛函. 当 H 是线性调和函数时，我们有

定理10.3.6 设 $H(\mu)=\langle\mu,h\rangle$，$h$ 是底过程 ξ 的有界非负调和函数. 则对于任何的 $\mu\notin Z(H)$，$f\in pbC(D)$，有

$$
P^{H,\mu}\exp\{-\langle X_{t\wedge\tau},f\rangle\} = \mu^{-1}(h)\exp\{-\langle\mu,V_rf\rangle\}U_r(f,h), \tag{10.3.10}
$$

其中 V_rf 由(10.3.2)决定，$U_r(f,h)$满足

$$
U_r(f,h) + 2\Pi_{r,x}\int_r^{t\wedge\tau}\gamma(\xi_s)U_s(f,h)(\xi_s)V_sf(\xi_s)ds = h(x). \tag{10.3.11}
$$

证明 对于 $\lambda>0$考虑

$$
P^{\mu}\exp\{-\langle X_{t\wedge\tau},f+\lambda h\rangle\} = \exp\{-\langle\mu,V_r(f+\lambda h)\rangle\}.
$$

注意到 V_rf 关于 f 连续，

$$
P^{\mu}\exp\{-\langle X_{t\wedge\tau},f\rangle\}\langle X_{t\wedge\tau},h\rangle
$$

$$= \frac{d}{d\lambda} P^{\mu} \exp\{-\langle X_{t\wedge\tau}, f + \lambda h\rangle\}|_{\lambda=0}$$

$$= \frac{d}{d\lambda} \exp\{-\langle \mu, V_r(f + \lambda h)\rangle\}|_{\lambda=0}$$

$$= \exp\{-\langle \mu, V_r(f)\rangle\}\langle \mu, \frac{d}{d\lambda} V_r(f + \lambda h)|_{\lambda=0}\rangle. \quad (10.3.12)$$

由(10.3.2)可知，

$$\frac{d}{d\lambda} V_r(f + \lambda h)(x)|_{\lambda=0}$$

$$+ 2\Pi_{r,x}\int_r^{t\wedge\tau} \gamma(\xi_s) \frac{d}{d\lambda} V_s(f + \lambda h)(\xi_s)|_{\lambda=0} V_s f(\xi_s) ds$$

$$= \Pi_{r,x} h(\xi_{t\wedge\tau}) = h(x). \quad (10.3.13)$$

取 $U_r(f,h) = \frac{d}{d\lambda} V_r(f+\lambda h)|_{\lambda=0}$. 由定义(10.3.9)，

$$P^{H,\mu} \exp\{-\langle X_{t\wedge\tau}, f\rangle\}$$

$$= \mu^{-1}(h) P^{\mu} \exp\{-\langle X_{t\wedge\tau}, f\rangle\}\langle X_{t\wedge\tau}, h\rangle. \quad (10.3.14)$$

结合(10.3.12)及(10.3.13)即得所要的结果. □

注10.3.7 定理10.3.6推广了 Roelly-Rouault(1989)在[168]中的结果. 他们考虑的只是 $h\equiv1$ 的情况，而 Overbeck(1993)[149]考虑的是超 Brown 运动时-空调和函数. 当然这里的证明方法是程式化的，没有任何特别之处.

相应地，当 H 指数调和函数时我们有

定理10.3.8 设 $H(\mu)=\exp\{-\langle\mu,u\rangle\}$，其中 u 由(10.2.8)给出. 则对于 $f\in pC_b(\overline{D})$，我们有

$$P^{H,\mu} \exp\{-\langle X_{t\wedge\tau}, f\rangle\} = \exp\{-\langle \mu, V_r - u\rangle\}, \quad (10.3.15)$$

其中 $V_r=\widetilde{V}_r(f+u)$，而 $\widetilde{V}$ 由(10.3.2)式给出.

证明 由定义及(10.3.1)即得. □

注10.3.9 条件测度值分枝过程实质上可以看成一类具有交互作用的测度值过程(参见文献[208])，这种交互作用是由于调和函数作用后产生的. 一般来讲，具有交互作用的测度值分枝过程是没有上述的所谓对数 Laplace 律，给我们的研究造成很大的困难.

然而在这种特殊情况下，上述定理为我们进一步研究条件测度值过程铺平了道路.

我们上面研究了全空间上超调和函数的分类定理及有关的条件测度值分枝过程. 显然要做的事情还很多. 在此我们简单列举两方面的问题. 一是有关分类定理的推广. 在§4.1，我们对于一般分枝特征的超过程的鞅问题进行了研究，一个自然的问题是能否给出一般分枝特征的超过程调和函数分类定理. 当过程不是时间齐次时，情况如何？相信可以预见不同的结果，因此进一步的深入研究将是很有意义的. 二是条件测度值过程的继续研究. 条件超过程的研究仅仅才有一个开端，比较细致的轨道构造及其过程若干性质的讨论是很好的研究课题.

另外，有关区域上超过程的鞅问题如何提出？它们的无穷小算子是什么？这些问题都还没有明确答案.

文献评注：本章主要内容取材于文献[228]，[232]. 吴荣、杨春鹏(1996)给出了空间区域上超扩散调和函数的一些性质，并建立了与非线性二阶椭圆边值问题的联系. 王永进讨论了一类特殊条件超过程的极限性质. 叶俊等也在这些方面做了一些工作.

第十一章　超扩散与非线性偏微分方程

自从40年代以来，扩散过程和线性偏微分方程之间的联系是概率界研究的主要问题之一. 最早从事这方面工作的有 Kakutani(1944)，Doob(1954，1955)和 Hunt(1957，1958)等等(参见文献[205]和[36]). 他们最初的想法是用 Brown 运动来表示古典偏微分方程(如 Dirichlet 问题、Poisson 问题等)的解. Doob(1984)在[36]中较全面地总结了有关的结果，并详细阐述了用 Brown 运动解偏微分方程的基本思想和方法.

从前面的讨论我们知道，超过程与非线性微分方程也具有密切的关系. 因此，人们自然会想到利用超过程去求解非线性偏微分方程. 这方面开创性的工作属于 E. B. Dynkin(1991，1992)，并作为他一生主要工作的一部分而荣获1991年度 Steele 终身成就奖.

我们先简要回顾扩散过程及偏微分方程的一些基本结果，其中有些结论将直接引用.

§11.1　扩散过程与偏微分方程

首先考虑 $S=\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ 上的微分算子

$$L=\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{d}b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i},(t,x)\in S. \tag{11.1.1}$$

其系数满足下列条件：

1.1.A(一致椭圆条件)　存在常数 $\gamma>0$使得

$$\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(t,x)u_iu_j\geqslant\gamma\sum_{i=1}^{d}u_i^2,\forall\ (t,x)\in S,u_1,\cdots,u_d\in\mathbb{R}.$$

1.1.B　a_{ij}和 b_i 是有界的，且满足 Hölder 条件：即存在常数 A

>0及$0<\alpha\leqslant 1$使得对于所有 s,t,x,y,

$$|a_{ij}(t,x)-a_{ij}(s,y)|\leqslant A(|t-s|^{\alpha/2}+|x-y|^{\alpha}),$$
$$|b_i(t,x)-b_i(t,y)|\leqslant A|x-y|^{\alpha}.$$

在上述条件下,存在函数 $p(r,x;t,y)$使得对于任意有界函连续函数 f,

$$u(r,x)=\int_{R^d}p(r,x;t,y)f(y)dy$$

满足方程

$$\dot{u}(r,x)+Lu(r,x)=0,(r,x)\in[0,t)\times\mathbb{R}^d$$

和条件

$$u(r,x)\to f(x),\ 当\ r\uparrow t.$$

p 称为方程 $\dot{u}+Lu=0$的基本解(其存在性的证明参见文献[77], Chapter 1).

生成元为 L 的扩散过程,简称为 L-扩散过程.它是具有连续轨道$\mathbb{R}^d$ 上的 Markov 过程,其转移函数为 $p(r,x;t,dy)=p(r,x;t,y)dy$.显然扩散过程是右过程.设 Q 是 S 的开子集.以 $C(Q)$表示 Q 上连续函数的全体.记 $u\in C^1(Q)$如果 u 及 $\partial u/\partial x_i,i=1,\cdots,d$ 属于 $C(Q)$;$u\in C^2(Q)$如果 $u,\dot{u},\partial u/\partial x_i,i=1,\cdots,d$ 及 $\partial^2u/\partial x_i\partial x_j,i,j=1,\cdots,d$ 属于 $C(Q)$. 由[77],Chapter 2知,

引理11.1.1(极大值原理) 假设 Q 是有界开集,$u\in C^2(Q)$满足

$$\dot{u}(r,x)+Lu(r,x)\geqslant 0,\ (r,x)\in Q,$$
$$\limsup u(r,x)\leqslant 0,(r,x)\to(t,a)\in\partial Q.$$

则 $u(r,x)\leqslant 0,(r,x)\in Q$.

考虑方程

$$\dot{u}(r,x)+Lu(r,x)=0,\ (r,x)\in Q \tag{11.1.2}$$

的古典解,即 $u\in C^2(Q)$且满足(11.1.2).由极大值原理易知,

定理11.1.2 设 Q 有界,f 是 ∂Q 上有界连续函数,则存在 Q 上唯一函数 u 使得

(a)$u\leqslant v$ 如果 $v\in C^2(Q)$,

$$\begin{cases}\dot{v}(r,x)+Lv(r,x)\leqslant 0,(r,x)\in Q;\\ \liminf\limits_{(r,x)\to c} v(r,x)\geqslant f(c),\forall\, c\in\partial Q,\end{cases}\tag{11.1.3}$$

(b)$u\geqslant v$ 如果 $v\in C^2(Q)$,

$$\begin{cases}\dot{v}(r,x)+Lv(r,x)\geqslant 0,(r,x)\in Q;\\ \limsup\limits_{(r,x)\to c} v(r,x)\leqslant f(c),\forall\, c\in\partial Q.\end{cases}\tag{11.1.4}$$

而且 u 满足(11.1.2). □

称 u 为 Perron 解(Perron 此项开创性工作发表于1923, Wiener 和 Brelot 一般化为椭圆情况. 抛物情况可参见 Doob 的早期工作).

定理11.1.3 设$(\xi_t,P_{r,x})$是 L-扩散过程,则方程(11.1.2)的 Perron 解可以表示为

$$u(r,x)=P_{r,x}f(\tau,\xi_\tau),\tag{11.1.5}$$

其中 $\tau=\tau_r:=\inf\{t>r,(t,\xi_t)\notin Q\}$ 为 Q 的首出时.

证明 第一步,假定 $h\in C_c^2(S)$,$\mathscr{F}[r,t]$是 $\xi_s,s\in[r,t]$生成的 σ-代数,

$$M_t:=h(t,\xi_t)-\int_r^t(\dot{h}+Lh)(s,\xi_s)ds,t\geqslant r.\tag{11.1.6}$$

由于 ξ 是 L-扩散过程,由 Itô 公式可知$(M_t,\mathscr{F}[r,t],P_{r,x})$是鞅. 注意到 τ 有限和 h 有界,由 Doob 停时定理,

$$h(r,x)=P_{r,x}h(\tau,\xi_\tau)-P_{r,x}\int_r^\tau(\dot{h}+Lh)(s,\xi_s)ds.\tag{11.1.7}$$

第二步,考虑开集列 $Q_n\uparrow Q$ 使得 $\overline{Q}_n\subset Q_{n+1}$,并设 v 满足(11.1.3). 考虑函数 $h_n\in C_c^2(S)$,在 $\overline{Q}_n$ 上与 v 一致. 设 τ_n 是 Q_n 的首出时. 由(11.1.7),

$$h_n(r,x)=P_{r,x}h_n(\tau_n,\xi_{\tau_n})-P_{r,x}\int_r^{\tau_n}(\dot{h}_n+Lh_n)(s,\xi_t)ds.$$

于是对于所有$(r,x)\in Q_n$,

$$v(r,x)=P_{r,x}v(\tau_n,\xi_{\tau_n})-P_{r,x}\int_r^{\tau_n}(\dot{v}+Lv)(s,\xi_t)ds$$

$$\geqslant P_{r,x}v(\tau_n,\xi_{\tau_n}). \tag{11.1.8}$$

显然$(\tau_n,\xi_{\tau_n})\to(\tau,\xi_\tau)$，由 Fatou 引理，

$$v(r,x)\geqslant P_{r,x}\liminf_{n\to\infty} v(\tau_n,\xi_{\tau_n})\geqslant P_{r,x}f(\tau,\xi_\tau)=u(r,x).$$

同理可证，$v\leqslant u$ 如果 v 满足(11.1.4). 证毕. □

为了改进上面的极大值原理，我们引入

定义11.1.4 称 ∂Q 的一个子集 T 是**全子集**，如果

$$P_{r,x}\{(\tau,\xi_\tau)\in T\}=1,\ \forall\ (r,x)\in Q. \tag{11.1.9}$$

定理11.1.5 设 Q 有界，T 是 ∂Q 的全子集. 如果 $u\in C^2(Q)$有上界且满足

$$\dot{u}(r,x)+Lu(r,x)\geqslant 0,\ (r,x)\in Q, \tag{11.1.10}$$

$$\limsup u(r,x)\leqslant 0\ 当(r,x)\to(t,a)\in T, \tag{11.1.11}$$

则在 Q 中，$u\leqslant 0$.

证明 令 $\phi(c)=\limsup_{(r,x)\to c}u(r,x)$，取 $f=\phi\vee 0$. 显然，u 满足(11.1.4)，由定理11.1.3，

$$u(r,x)\leqslant P_{r,x}f(\tau,\xi_\tau).$$

因为 $P_{r,x}$-a.s. $(\tau,\xi_\tau)\in T$，且 $f|_T=0$，上式的右边等于0. □

下面的定理称为**均值原理**.

定理11.1.6 假设 Q 是有界区域，T 是 ∂Q 的全子集. 如果 u 在 $Q\cup T$ 上有界连续，满足(11.1.2)，则

$$u(r,x)=P_{r,x}u(\tau,\xi_\tau),(r,x)\in Q. \tag{11.1.12}$$

证明 设 Q_n 与 τ_n 如定理11.1.3证明中给出. 则 $u(r,x)=P_{r,x}u(\tau_n,\xi_{\tau_n})$. 由于$(\tau_n,\xi_{\tau_n})\to(\tau,\xi_\tau)\in T$，$P_{r,x}$-a.s.，再由控制收敛定理即可得(11.1.12). □

命题11.1.7 方程(11.1.2)的解在有界收敛意义下封闭.

证明 事实上，若(11.1.12)对于 u_n 成立，且 $u_n\to u$ 有界收敛，那么(11.1.12)对于 u 也成立，从而也是(11.1.2)解. □

定义11.1.8(正则点) 取 $\tau_+=\inf\{t:t>r;(t,\xi_t)\notin Q\}$. 我们称 ∂Q 上一点 $c=(t,a)$是正则的，并记为 $c\in\partial_r Q$，如果 $P_{t,a}\{\tau_+=t\}=1$.

由文献[37],Chapter 13,此定义又等价于：$(t,a)\in\partial Q$ 是正则的，如果对于任一 $t'>t$

$$P_{r,x}\{\tau>t'\}\to 0 \text{ 当}(r,x)\to(t,a). \qquad (11.1.13)$$

其证明主要是基于 ξ 的如下性质：

(i)(强 Feller 性)对于任一有界连续函数 f,函数

$$u(r,x)=P_{r,x}f(\xi_t)=\int p(r,x;t,y)f(y)dy,\ r<t,x\in E$$

是连续的；

(ii)对于 $\beta>0$,

$$\sup_{r,x}P_{r,x}\{\sup_{r\leqslant s\leqslant r+h}|\xi_s-\xi_r|\geqslant\beta\}\to 0,h\to 0.$$

正则性的作用可解释为：

定理11.1.9 如果 (t,a) 是 ∂Q 的正则点，f 在 ∂Q 上有界且在 (t,a) 点连续，则

$$u(r,x)=P_{r,x}f(\tau,\xi_\tau)\to f(t,a),Q\ni(r,x)\to(t,a).$$

为了说明点 $c=(t,a)\in\partial Q$ 是正则点，只需构造 c 点的一个闸函数，即定义 $\bar{Q}$ 上的连续函数 u,使得在 Q 上

$$\dot{u}+Lu\leqslant 0,u(c)=0,u(z)>0,\text{若 } z\neq c. \quad (11.1.14)$$

实际上，由于 Q 是有界区域，对于 $t'>t$, $\beta:=\inf_{(r,x)\in Q\cap S_{\geqslant t'}}u(r,x)$ 是严格正的. 由 Chebyshev 不等式，

$$P_{r,x}\{\tau>t'\}\leqslant P_{r,x}\{u(\tau,\xi_\tau)\geqslant\beta\}\leqslant P_{r,x}u(\tau,\xi_\tau)/\beta.$$

又由定理11.1.3,

$$P_{r,x}u(\tau,\xi_\tau)\leqslant u(r,x),$$

结合(11.1.14)即得(11.1.13). 特别地，应用形如

$$u(r,x)=\varepsilon^{-2p}-|(r,x)-(r',x')|^{-2p} \quad (11.1.15)$$

的闸函数，我们得到

定理11.1.10(正则性检验) 点 $c=(t,a)\in\partial Q$ 是正则的，如果存在 $c'=(r',x')$, $x'\neq a$ 使得

$$|(r-x)-(r',x')|>|(t-a)-(r',x')|$$

对于所有充分靠近 c 但又不等于 c 的点 $(r,x)\in\bar{Q}$ 成立.

证明 当 p 充分大,形如(11.1.15)的函数是 c 点的在 c 的一个小邻域与 Q 交集上的闸函数. □

应用该检验于简单矩形 $(r_1,r_2)\times D$(其中 D 是 $\mathbb{R}^d$ 中的矩形),我们可以知道,其所有边界点均是正则点.

定义11.1.11(正则区域) 我们称一个开集 Q 为正则区域,如果它的全体正则点集限制在 ∂Q 上是全子集.

例如:所有的矩形,球(柱)体是正则区域,而 $Q=\{(r,x):r\neq 1\}$是非正则区域.

引理11.1.12 如果 U 是正则开集,对于任一开集 Q 使得 $\bar{U}\cap\partial Q\subset\partial_r Q$,则 $U\cap Q$ 也是正则的.

证明 注意到 $\partial(U\cap Q)=N_1\cup N_2$,其中 $N_1=\bar{U}\cap\partial Q$,$N_2=\partial U\cap Q$. 显然,$N_1$及 $N_2\cap\partial_r U$ 包含于 $\partial_r(U\cap Q)$. 由于 $\partial_r U$ 是 ∂U 中的全子集,则 $N_1\cup(N_2\cap\partial_r U)=\partial_r(U\cap Q)$也是 $\partial(U\cap Q)$中的全子集. □

定理11.1.3,11.1.5及11.1.9推出,

定理11.1.13 如果 Q 是一个有界正则开集,对于每一 $\partial_r Q$ 上有界连续函数 f,第一边值问题

$$\begin{cases} \dot{u}(r,x)+Lu(r,x)=0,(r,x)\in Q; \\ u|_{\partial_r Q}=f \end{cases} \tag{11.1.16}$$

有唯一有界解 $u(r,x)=P_{r,x}f(\tau,\xi_\tau)$.

定理11.1.14(抛物位势) 称

$$F(r,x)=P_{r,x}\int_r^\infty \rho(s,\xi_s)ds=\int_r^\infty\int_E p(r,x;s,y)\rho(s,y)dsdy \tag{11.1.17}$$

为 S 上的 Borel 函数 ρ 的位势.

再由文献[77],定理1.9,

定理11.1.15 如果 ρ 是有界具有紧支撑的函数,则 $F\in C^1$. 若再假设 ρ 是(r,x)连续函数,而且 r 一致地关于 x 局部 Hölder 连续,则 $F\in C^2(S)$且

$$\dot{F}(r,x)+LF(r,x)=-\rho(r,x),(r,x)\in S. \tag{11.1.18}$$

以 Q_t 表示开子集 $Q\subset S$ 的 t-截口集，$\mathscr{B}_t$ 表示 Q_t 的 σ-代数. 取

$$P_Q(r,x;t,B)=P_{r,x}\{\xi_t\in B,\tau>t\},r<t,x\in Q_r,B\in\mathscr{B}_t,$$

其中 τ 为 Q 的首出时. ξ 的 Markov 性推出：对于所有 $(r,x)\in Q$，$r<t_1<\cdots<t_n$，$B_1\in\mathscr{B}_{t_1},\cdots,B_n\in\mathscr{B}_{t_n}$，

$$P_{r,x}\{\xi_{t_1}\in B_1,\cdots,\xi_{t_n}\in B_n,\tau>t_n\}$$
$$=\int_{B_1}\cdots\int_{B_n}P_Q(r,x;t_1,dy_1)\cdots P_Q(t_{n-1},y_{n-1};t_n,dy_n).$$

特别地，应用上式于 $n=2,t_1=s,t_2=t,B_1=Q_s,B_2=B$，我们有，$r<s<t,B\in\mathscr{B}_t$，

$$P_Q(r,x;t,B)=\int_{Q_s}P_Q(r,x;s,dy)P_Q(s,y;t,B).$$

(11.1.19)

因此，P_Q 是 Markov 转移函数.

定义11.1.16 ξ_t 在区间$[r,\tau]$上的限制$\bar{\xi}_t$ 是以 P_Q 为转移函数的 Markov 过程. 我们称$\bar{\xi}$为 ξ 在 Q 中的**部分扩散过程**.

由 ξ_t 的强 Markov 性，

$$P_{r,x}\{\tau\leqslant t,\xi_t\in B\}=P_{r,x}\{\tau\leqslant t,P_{\tau,\xi_\tau}\{\xi_t\in B\}\},$$

所以

$$P_Q(r,x;t,B)=p(r,x;t,B)-P_{r,x}1_{\{\tau\leqslant t\}}p(\tau,\xi_\tau;t,B).$$

(11.1.20)

同样地，对于 Q 中的 Borel 函数 ρ，令

$$F_Q(r,x)=P_{r,x}\int_r^\tau\rho(s,\xi_s)ds=\int_Q P_Q(r,x;s,y)\rho(s,y)dsdy.$$

(11.1.21)

并约定 $P_Q(r,x;t,y)=0,t<r$. 我们有如下定理：

定理11.1.17 如果 Q 和 ρ 是有界的，则 $F_Q\in C^1(Q)$，且

$$F_Q(r,x)\to 0,(r,x)\to(t,a),(r,x)\in Q. \quad (11.1.22)$$

若再假设 ρ 关于(r,x)连续，而且 ρ 一致地关于 x 局部 Hölder 连续，则 $F_Q\in C^2(Q)$且

$$\dot{F}(r,x)+LF(r,x)=-\rho(r,x),(r,x)\in Q.$$

(11.1.23)

证明 由(11.1.20)知, $F_Q(r,x)=F(r,x)-P_{r,x}F(\tau,\xi_\tau)$, 而 $F(r,x)$ 由(11.1.17)给出. 结论由定理11.1.3与定理11.1.15直接得到.

在本节最后,我们给出比较原理.

定理11.1.18(比较原理) 设 Q 是一个有界区域, $\psi:\mathbb{R}_+\times Q\to\mathbb{R}_+$ 满足如下条件

$$\psi(r,x;u)\geqslant\psi(r,x;v),(r,x)\in Q,u\geqslant v\in\mathbb{R}_+. \tag{11.1.24}$$

如果 $u,v\geqslant 0$ 属于 $C^2(Q)$,

$$\dot{u}(r,x)+Lu(r,x)-\psi(r,x;u(r,x))\geqslant\dot{v}(r,x)+Lv(r,x)-\psi(r,x;v(r,x)), \tag{11.1.25}$$

$(r,x)\in Q$, 而且 $u-v$ 有上界,

$$\limsup[u(r,x)-v(r,x)]\leqslant 0,\ (r,x)\to(t,a)\in T, \tag{11.1.26}$$

其中 T 是 ∂Q 的全子集. 则 $u(r,x)\leqslant v(r,x),(r,x)\in Q$.

证明 设 $w=u-v$. 假设所要结论是错的,即 $\tilde{Q}=\{(r,x)\in Q;w(r,x)>0\}$ 非空. 由题设条件(11.1.26)和(11.1.24),对于任何 $(r,x)\in\tilde{Q},\dot{w}(r,x)+Lw(r,x)\geqslant\psi(r,x;u(r,x))-\psi(r,x;v(r,x))\geqslant 0$. 注意到, $\tilde{T}=\partial\tilde{Q}\cap(Q\cup T)$ 是 $\partial\tilde{Q}$ 的全子集. 若 $(t,a)\in\partial\tilde{Q}\cap Q$, 则 $w(t,a)=0$. 若 $(t,a)\in\partial\tilde{Q}\cap T$, 由(11.1.26), $\limsup w(r,x)\leqslant 0,(r,x)\to(t,a),(r,x)\in Q$. 于是,由定理11.1.5得 $w(r,x)\leqslant 0$, $(r,x)\in\tilde{Q}$. 矛盾! □

§11.2 非线性抛物型偏微分方程的概率解法

本节的目的在于说明超扩散过程在偏微分方程中的应用和主要思想,因此仅考虑比较特殊的情况. 更一般的理论,可见 Dynkin 等人的系列文章.

假设 $\Psi(x,z)=\gamma(x)z^\alpha,1<\alpha\leqslant 2,\kappa(ds)=ds$. 相应的超过程称为 (L,α)-超扩散过程 $(X_t,t\geqslant r,P^{r,\mu})_{\mu\in M_F(\mathbb{R}^d)}$. 采用§3.6中的记号,

我们考虑增广超扩散过程$(X_\tau,\tau\in\overline{\mathscr{T}},P^{r,\mu})_{\mu\in M_F(\mathbb{R}^d)}$. 由其分枝粒子系统逼近构造方法和扩散过程的连续性，我们知道，$X_{\tau_Q}\in\partial Q$. §3.6中的结论对增广超扩散过程成立.

定义(增广)占位时过程 $Y=(Y_\tau,\tau\in\overline{\mathscr{T}},P^{r,\mu})_{\mu\in M_F(\mathbb{R}^d)}$如下：

$$\langle Y_\tau,\rho\rangle:=\int_{\mathbb{R}_+}\langle\tilde{X}_t,\rho\rangle dt,\rho\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d),\qquad(11.2.1)$$

其中 $\tilde{X}$ 表示 X 在 Q 中的部分超扩散过程(见定义3.6.6). 显然，(11.2.1)是§4.5节定义的占位时过程的推广. 应用定理3.6.7，对于任何的 $\mu\in M_F(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$和任何的 $f,\rho\in p\mathscr{B}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$，

$$P^\mu\exp\{-\langle Y_\tau,\rho\rangle-\langle X_\tau,f\rangle\}=\exp\langle\mu,-v\rangle,\quad(11.2.2)$$

其中

$$v(r,x)+P_{r,x}\int_r^\tau\Psi(v)(s,\xi_s)\kappa(ds)$$
$$=P_{r,x}\left[\int_r^\tau\rho(t,\xi_t)dt+f(\tau,\xi_\tau)\right].\qquad(11.2.3)$$

考虑方程

$$\dot{v}(r,x)+Lv(r,x)-\gamma(x)v^\alpha(r,x)$$
$$=-\rho(r,x),(r,x)\in Q,\qquad(11.2.4)$$

其中$1<\alpha\leqslant2$，L 是一致椭圆算子，Q 是 $S=\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ 中的有界开区域，ρ 是定义在 Q 上的函数. 设 $\xi=(\xi_t,t\geqslant r,P_{r,x})$是 L-扩散过程.

我们说 v 是方程(11.2.4)的解意指它是强解，即 $v\in C^2(Q)$. 称 v 在 $B\subset\partial Q$ 上满足边值条件 $v=f$，即当$(r,x)\to(t,a)\in B$，$(r,x)\in Q$时，$v(r,x)\to f(r,a)$.

定理11.2.1 设 X 是(L,α)-超扩散过程. Q 是一个有界开集，τ 是 Q 的首出时. 如果 $\rho\geqslant0$有界而且属于 $C^1(Q)$，$f\geqslant0$是 ∂Q 上的 Borel 有界函数，则

$$v(r,x)=-\log P^{r,\delta_x}\exp\{-\langle Y_\tau,\rho\rangle-\langle f,X_\tau\rangle\}\qquad(11.2.5)$$

是方程(11.2.4)的一个解. 如果$(t,a)\in\partial Q$ 是正则点，且 f 在该点连续，则

$$v(r,x)\to f(t,a)(Q\ni(r,x)\to(t,a)).\qquad(11.2.6)$$

如果 Q 是正则的，则(11.2.5)是方程(11.2.4)在所有 $(t,a)\in\partial_r Q$ 满足条件(11.2.6)的唯一解．而且对于任何 $\mu\in M_F(\mathbb{R}^d)$，$\mathrm{supp}(\mu)\subset Q$，

$$P^{\mu}\exp\langle X_\tau, -f\rangle = e^{-\langle\mu,v\rangle}. \qquad (11.2.7)$$

证明 方程(11.2.3)可重写为

$$v + F_1 = h + F, \qquad (11.2.8)$$

其中 $h(r,x)=P_{r,x}f(\xi_\tau)$，

$$F(r,x) = P_{r,x}\int_r^\tau \rho(t,\xi_t)dt,\ F_1(r,x) = P_{r,x}\int_r^\tau \Psi(v)(s,\xi_s)ds.$$

显然 h 和 F 是有界的．从而 v 也是有界的．于是由经典结果知，F，$F_1\in C^1(Q)$，$h\in C^2(Q)$．于是由(11.2.8)即可断定 $v\in C^1(Q)$，因而 $v^\alpha\in C^1(Q)$，进而 $F_1\in C^2(Q)$．由(11.2.2)和(11.2.3)便知 v 是方程的解．另一方面，由于 h 满足(11.2.6)，而 $F(r,x)$，$F_1(r,x)\to 0$，$(r,x)\to(t,a)\in\partial_r Q$，所以，$v$ 也满足(11.2.6)．最后，若 Q 是正则的，定理11.1.18保证了解的唯一性． □

定理11.2.1的一个显然推论是

系11.2.2(中值定理) 假设 τ 是有界区域 Q 的首出时，$T\subset\partial_r Q$ 是 ∂Q 的全子集．如果 v 满足方程

$$\dot v(r,x) + Lv(r,x) - v^\alpha(r,x) = 0,\ (r,x)\in Q \qquad (11.2.9)$$

而且它在 $Q\cup T$ 上有界，则

$$P^{r,\delta_x}\exp\langle X_\tau, -v\rangle = e^{-v(r,x)},(r,x)\in Q. \qquad (11.2.10)$$

引理11.2.3 设 $Q=(s,t)\times U$，其中 $U=\{x:|x-x^0|<R\}$．令

$$v(r,x) = \lambda[(t-r)(R^2-|x-x^0|^2)^2]^{-1/(\alpha-1)},$$
$$(r,x)\in Q. \qquad (11.2.11)$$

这里 λ 是正常数．我们有

$$\lim v(r,x)\to\infty,\ (r,x)\to(t,a)\in\partial_r Q. \qquad (11.2.12)$$

而且，在 Q 中，

$$\dot v + Lv - \gamma v^\alpha \leqslant v^\alpha\left(\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{\alpha-1} - \gamma\right), \qquad (11.2.13)$$

其中

$$\lambda_0^{\alpha-1} = a_0R^4 + (t-s)(a_1R^3 + a_2R^2), \qquad (11.2.14)$$

而常数 $a_0>0, a_1, a_2\geqslant 0$依赖于 α,维数 d 和 a_{ij}, b_i 在 Q 中的上界.

证明 取 $u(x)=(R^2-|x-x^0|^2)^{-2/(\alpha-1)}$. 直接计算可得

$$Lu = (R^2-|x-x^0|^2)^{-2\alpha/(\alpha-1)}\Big\{c_1\sum_{i,j=1}^d a_{ij}z_iz_j$$

$$+ c_2(R^2-|x-x^0|^2)\Big(\sum_{i=1}^d a_{ii} + \sum_{i=1}^d b_iz_i\Big)\Big\},$$

其中 $z_i=x_i-x_i^0, c_1=8(\alpha+1)(\alpha-1)^{-1}, c_2=4(\alpha-1)^{-1}$. 设 $A(r,x)$ 是矩阵$(a_{ij}(r,x))_{d\times d}$的最大特征值,$B(r,x)^2=\sum_{i=1}^d b_i(r,x)^2$. 若记 A 和 B 分别是 $A(r,x)$ 和 $B(r,x)$ 在 Q 中的上界,那么 $\sum_{i=1}^d a_{ii}\leqslant Ad$, $\sum_{i=1}^d b_iz_i\leqslant BR$. 从而,

$$Lu\leqslant (R^2-|x-x^0|^2)^{-2\alpha/(\alpha-1)}[AR^2(c_1+c_2d)+c_2BR^3]$$

而且(11.2.13)—(11.2.14)式对于 $a_0=1(\alpha-1), a_1=c_2B, a_2=A(c_1+c_2d)$成立. □

应用比较原理(定理11.1.18)与引理11.2.3,我们来证明方程(11.2.9)的一些性质. 取

$$U_\varepsilon(r^0,x^0) = \{r: |r-r^0|<\varepsilon\}\times\{x: |x-x^0|<\varepsilon\}. \qquad (11.2.15)$$

定理11.2.4 假设$\|\gamma\|:=\inf_{x\in\mathbb{R}^d}\gamma(x)>0$,则方程(11.2.9)在全空间 S 上的非负解只能是零.

证明 设 v 由(11.2.11)定义,且 $s<r^0<t, \lambda=\lambda_0\|\gamma\|^{-1/(\alpha-1)}$. 那么根据比较原理,

$$u(r^0,x^0)\leqslant v(r^0,x^0) = \lambda[(t-r^0)R^4]^{-1/(\alpha-1)}.$$

显然,当 $t\uparrow\infty, R\uparrow\infty$时,上式右端趋向于0. □

注11.2.5 若条件$\|\gamma\|>0$去掉,则结论不一定成立. 例如,Sheu(1995)[177]证明了当 $L=\triangle$而 $\gamma\sim\|x\|^{-l}, l>2, \|x\|\to\infty$时,方程(11.2.9)存在唯一无界正解.

对于 $Q\subset S$,记 $Q_p=\{x\in\mathbb{R}^d; \exists t$,使得$(t,x)\in Q\}$.

定理 11.2.6 假设 Q 是开集，$\inf_{x\in Q_p}\gamma(x)>0$，则方程(11.2.9)的所有正解类是局部一致有界的.

证明 设 $U_\beta=U_\beta(r^0,x^0)$，v_β 由(11.2.11)给出，其中 $s=r^0-\beta$，$t=r^0+\beta$，$R=\beta$，$\lambda=\lambda_0\|\gamma\|^{-1/(\alpha-1)}$. 若 β 充分小使得 $\overline{U}_\beta\subset Q$，于是由比较原理知，在 U_β 中 $v\leqslant u_\beta$. 因此，取 $\varepsilon=\beta/2$，并令 N 是 v_β 在 $\overline{U}_\varepsilon$ 的上界，则 $v(r,x)\leqslant N$ 对于所有解 v 和所有 $(r,x)\in\overline{U}_\varepsilon(r^0,x^0)$. □

定理11.2.7 设 Q 为任意开集，$\inf_{x\in Q_p}\gamma(x)>0$. 假设 B 是 ∂Q 的相对开子集. 对于 $c\in\mathbb{R}$，以 $S(B,c)$ 表示方程(11.2.9)的满足条件

$$\limsup v(r,x)\leqslant c,(r,x)\to(t,a)\in B \tag{11.2.16}$$

解的集合. 则对于任一 $(r^0,x^0)\in B$，存在 $\varepsilon>0$，$N<\infty$ 使得 $\partial Q\cap U_\varepsilon(r^0,x^0)\subset B$，而且

$$v(r,x)\leqslant N,v\in S(B,c),\forall\ (r,x)\in Q\cap\overline{U}_\varepsilon(r^0,x^0). \tag{11.2.17}$$

证明 设 $Q_\beta=Q\cap U_\beta(r^0,x^0)$. 考虑如定理11.2.6证明中的 v_β，取

$$f_\beta(t,a)=\limsup(v-v_\beta),(r,x)\to(t,a),(r,x)\in Q_\beta.$$

再取 $A_\beta=\partial_r U_\beta\cap\overline{Q}$，$\Gamma_\beta=U_\beta\cap\partial Q$. 由于 $\partial_r Q$ 是 ∂Q 的全子集，集合 $A_\beta\cup\Gamma_\beta$ 也是 ∂Q_β 的全子集. 显然，$f_\beta|_{A_\beta}=-\infty$. 剩下的我们要证存在 $\beta>0$ 使得 $f_\beta|_{\Gamma_\beta}\leqslant 0$. 为此，注意到 v_β 在 U_β 中的最小点为 (r^0,x^0)，其值是

$$\phi(\beta)=\left[\frac{(a_0+2a_1)\beta+2a_2}{2\beta^2\inf_{x\in Q_p}\gamma(x)}\right]^{1/(\alpha-1)}.$$

如果 $\Gamma_\beta\subset B$，则 $f_\beta|_{\Gamma_\beta}\leqslant c-\phi(\beta)$，而若 β 充分小时 $c-\phi(\beta)\leqslant 0$. 于是取 $\varepsilon=\beta/2$，即得所要的结果. □

定理11.2.8 设 v_n 是方程(11.2.9)的一列正解，$v_n\to v$ 在 Q 中逐点收敛，则 v 是方程(11.2.9)的解.

假设 B 是 ∂Q 的相对开子集，B 的所有点是正则的，而且 f 是 B 上有界连续函数. 若 v_n 满足边值条件

$$v_n|_B=f, \tag{11.2.18}$$

则 v 也满足同样的条件.

证明 设 $(r^0, x^0) \in Q$. 由定理11.2.6,当 ϵ 足够小时,v_n 在 $U_\epsilon(r^0, x^0)$ 中一致有界. 从而它们都具有中值性质(11.2.10). 根据控制收敛定理,v 也满足(11.2.10),即它在 $U_\epsilon(r^0, x^0)$ 中满足(11.2.9).

为证定理的第二部分,以 c 表示 f 在 B 上的上确界,ϵ 如定理11.2.7中给出. 令 $Q_\epsilon = U_\epsilon(r^0, x^0) \cap Q$, $\Gamma = \partial_r Q_\epsilon \cap \partial Q$. 注意到 v_n 是在 $\bar{Q}_\epsilon \cap Q$ 上一致有界的,$v_n \to \tilde{f}$ 在 $T = \Gamma \cup (Q \cap \partial_r U_\epsilon)$ 上逐点收敛,其中 $\tilde{f}(t,a) = f(t,a)$ 若 $(t,a) \in \Gamma$, $\tilde{f}(t,a) = v(t,a)$ 若 $(t,a) \in T \setminus \Gamma$. 显然,$T \subset \partial_r Q_\epsilon$ 是 ∂Q_ϵ 的全子集,v_n 在 $Q_\epsilon \cap T$ 上连续. 由推论11.2.2,所有的 v_n 在 Q_ϵ 和 T 上满足(11.2.10),v 也满足该性质. 由定理11.2.1,$v(r,x) \to \tilde{f}(r^0, x^0) = f(r^0, x^0)$, $(r,x) \to (r^0, x^0)$. □

定理11.2.9 假设 Q 是有界正则区域,τ 是 Q 的首出时,f: $\partial_r D \to [0, \infty]$ 是连续映射,则

$$v(r,x) = -\log P^{r,\delta_x} \exp\langle X_\tau, -f\rangle, (r,x) \in Q \tag{11.2.19}$$

是方程(11.2.19)满足

$$v|_{\partial_r Q} = f \tag{11.2.20}$$

的极小正解. 对于任何 $\mu \in M_F(\mathbb{R}^d)$,

$$P^\mu \exp\langle X_\tau, -f\rangle = e^{-\langle \mu, v\rangle}. \tag{11.2.21}$$

证明 设 $f_k = f \wedge k$. 由定理11.2.1,

$$v_k(r,x) = -\log P^{r,\delta_x} \exp\langle X_\tau, -f_k\rangle \tag{11.2.22}$$

满足(11.2.9)和

$$v_k|_{\partial_r Q} = f_k. \tag{11.2.23}$$

显然,$v_1 \leqslant v_2 \leqslant \cdots$ 和 $v_k \uparrow v$. 由定理11.2.8,v 是方程(11.2.9)的解,且在 $f(t,a) < \infty$ 的边界部分满足边界条件(11.2.20). 对于任何的 k, $\liminf v(r,x) \geqslant \liminf v_k(r,x) = f_k(t,a)$, $(r,x) \to (t,a) \in \partial_r Q$,所以当 $f(t,a) = \infty$ 时,(11.2.20)仍成立.

对于任意满足(11.2.9)和(11.2.20)正解 u,比较原理说明了

$v_k \leqslant u$. 因此 $v \leqslant u$. 公式(11.2.21)由(11.2.7)立得. □

定理11.2.10 假设 Q 和 τ 如定理11.2.9. 设 Γ 是 ∂Q 的相对闭子集, $A = \partial Q \backslash \Gamma \subset \partial_r Q$, $B = \Gamma \cap \overline{A^c}$. 则

$$v(r,x) = -\log P^{r,\delta_x}\{X_\tau(\Gamma) = 0\} \qquad (11.2.24)$$

是方程(11.2.9)的解, 且满足边值条件

$$v|_A = 0, \quad v|_B = \infty. \qquad (11.2.25)$$

对于 $\mu \in M_F(\mathbb{R}^d)$, $\mathrm{supp}(\mu) \subset Q$,

$$P^\mu\{X_\tau(\Gamma) = 0\} = e^{-\langle \mu, v \rangle}. \qquad (11.2.26)$$

特别地, 若 $\Gamma = \partial_r Q$, 则 $A = \varnothing$, $B = \partial_r Q$. 因此

$$v(r,x) = -\log P^{r,\delta_x}\{X_\tau = 0\} \qquad (11.2.27)$$

是满足条件

$$v|_{\partial_r Q} = \infty \qquad (11.2.28)$$

方程(11.2.9)的解.

证明 考虑一列单调递减非负连续函数 $f_k: \partial Q \to [0,\infty]$ 使得 $\{f_k = 0\} \uparrow A$ 和 $f_k|_\Gamma = \infty$. 设 v_k 是 f_k 对应的解. 显然 $v_k \downarrow v$. 由定理11.2.8, v 是满足边值条件(11.2.25)的解. 对于 $(r^0, x^0) \in B$, 存在连续函数 $\tilde{f}: \partial Q \to [0,\infty]$ 使得 $\tilde{f}(r^0, x^0) = \infty$, $\tilde{f}|_A = 0$. 如果 $\tilde{v}$ 由(11.2.19)对应于 $\tilde{f}$, 则由定理11.2.9知, $\tilde{v}(r^0, x^0) = \infty$. 因为在 Q 中 $\tilde{v} \leqslant v$, 所以 v 满足条件(11.2.25). □

§11.3 非线性椭圆型偏微分方程的概率解法

上面, 我们讨论了时间非齐次的情况. 做为上述结论的具体化, 我们来考虑时间齐次超扩散过程在边值问题中的应用. 因此, 从现在开始, 我们假设扩散算子不依赖于时间. 因此, 椭圆型微分方程可看做上节讨论的抛物型方程的特例.

设 $D \subset \mathbb{R}^d$, 定义 $\tau_D := \inf\{t > 0, \xi_t \notin D\}$. 注意到 $\tau_{[0,\infty)\times D} = \tau_D$, 那么 $\tau_D \in \overline{\mathscr{T}}$, 自然地, X_{τ_D} 也有定义. 记 $Q_k = [0,k) \times D$, 显然 $\tau^r_{Q_k} := \inf\{t > r, (t, \xi_t) \notin Q_k\} = \tau_D \wedge (k - r)$, 而且 $\tau^r_{Q_k} \uparrow \tau_D$.

假设 D 是正则有界区域，则 $P_x\{\tau_D<\infty\}=1$. 此时 $\partial_r Q_k=((0,k]\times\partial D)\cup(\{k\}\times D)$. 假设 $f:\partial D\to\mathbb{R}_+$ 是连续函数. 取 $\tilde{f}|_{(0,k]\times\partial D}(s,x)=f(x)$，而在其它边界点上为任意上界小于 f 的上界的非负连续函数. 由定理11.2.1知，

$$v_k(r,x)=-\log P^{r,\delta_x}\exp\langle X_{\tau_{Q_k}},-\tilde{f}\rangle \qquad (11.3.1)$$

是方程

$$\dot{v}(r,x)+Lv(r,x)-\gamma(x)v(r,x)^\alpha=0,(r,x)\in Q_k$$

$$(11.3.2)$$

的解，并满足条件

$$v(r,x)|_{\partial_r Q_k}=\tilde{f}(x). \qquad (11.3.3)$$

换句话说，由过程的时齐性，对于 $0\leqslant r<k,x\in D$,

$$v_k(r,x)=P_x\tilde{f}(\xi_{(k-r)\wedge\tau_D})-P_x\int_0^{(k-r)\wedge\tau_D}\gamma(\xi_s)v_k^\alpha(s,\xi_s)ds.$$

易证，$0\leqslant v_k$ 一致有界，则 $v:=\limsup_{k\to\infty}v_k$ 存在. 注意到 $P_x\{\tau_D<\infty\}=1$，由控制收敛定理，

$$v(r,x)=P_x\tilde{f}(\xi_{\tau_D})-P_x\int_0^{\tau_D}\gamma(\xi_s)v^\alpha(s,\xi_s)ds,\ r\geqslant 0,x\in D.$$

$$(11.3.4)$$

由底过程的轨道连续性，$\xi_{\tau_D}\in\partial D$，则(11.3.4)中右边第一项为 $P_xf(\xi_{\tau_D})$，从而 $v(r,x)$ 不依赖于 r. 这样(11.3.4)可重写为

$$v(x)=P_xf(\xi_{\tau_D})-P_x\int_0^{\tau_D}\gamma(\xi_s)v^\alpha(\xi_s)ds,x\in D.$$

$$(11.3.5)$$

它即是椭圆边值问题

$$\begin{cases}Lv(x)-\gamma(x)v^\alpha(x)=0,\ x\in D;\\ v|_{\partial D}=f\end{cases} \qquad (11.3.6)$$

的唯一解，而且由(11.3.1)与上述讨论，我们有

$$v(x)=-\log P^{\delta_x}\exp\langle X_{\tau_D},-f\rangle. \qquad (11.3.7)$$

综上所述，我们证明了

定理11.3.1 假设 ξ 是时齐强椭圆 L-扩散过程. X 为相应的

(L,α)-超扩散. 设 D 是有界正则区域, f 是定义在 ∂D 上的非负有界连续函数, 则边值问题(11.3.6)的唯一解可表示为(11.3.7)的形式. 而且对于任何 $\mu\in M_F(\mathbb{R}^d)$, $\mathrm{supp}(\mu)\subset D$,

$$P^\mu \exp\langle X_{\tau_D}, -f\rangle = \exp\langle \mu, -v\rangle. \tag{11.3.8}$$

该定理的重要意义是给我们提供了非线性微分方程模拟计算的理论依据. 我们将在下节讨论超 Brown 运动的模拟. 由定理 11.3.1, 不难验证下面的引理.

引理11.3.2 若 $\mathrm{supp}(\mu)\subset D$, $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 使得 $A\cap\partial D$ 是 ∂D 上诱导 Lebesgue 测度的零测集, 则 $P^\mu X_\tau(A)=0$.

进一步, 我们有

定理11.3.3 设 D 为正则区域, $\inf_{x\in D}\gamma(x)>0$. 则对于 $\forall a\in\partial D$ 及任何邻域 $U(a,\varepsilon):=\{x\in\mathbb{R}^d, |x-a|<\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$,

$$P^{\delta_x}\{X_\tau(U(a,\varepsilon)^c\cap\partial D)=0\}\to 1\ (x\to a, x\in D). \tag{11.3.9}$$

证明 $\partial U(a,\varepsilon)\cap\partial D$ 是零测集, 而且可以选取定义在 ∂D 上的连续函数 h, 使得 $h|_{\partial D\cap U(a,\varepsilon)^c}>0$, $h|_{\partial D\cap U(a,\varepsilon)}=0$, 则对于 $x\in D$,

$$\begin{aligned}
&P^{\delta_x}\{X_\tau(U(a,\varepsilon)^c\cap\partial D)=0\}\\
&=P^{\delta_x}\{X_\tau(\bar{U}(a,\varepsilon)^c\cap\partial D)=0\}(\text{由引理 11.3.2})\\
&=P^{\delta_x}\{\lim_{\lambda\to\infty}\exp\{-\lambda\langle X_\tau,h\rangle\}\}\\
&=\lim_{\lambda\to\infty}\exp\{-V_\lambda(x)\},
\end{aligned} \tag{11.3.10}$$

其中 V_λ 满足

$$\begin{cases} Lu(x)-\gamma(x)u^\alpha(x)=0, x\in D;\\ u|_{\partial D}=\lambda h. \end{cases} \tag{11.3.11}$$

再选取邻域 U': $\bar{U}'\subset U(a,\varepsilon)$, $U'\cap D$ 是正则的, 考虑

$$\begin{cases} Lu(x)-\gamma(x)u^\alpha(x)=0, x\in D\cap U';\\ u|_{\partial(D\cap U')}=V_\lambda|_{\partial(D\cap U')}. \end{cases} \tag{11.3.12}$$

由解的唯一性, (11.3.11)和(11.3.12)的解在 $\overline{D\cap U'}$ 中相同. 令 $\tau'=\inf\{t>0, \xi_t\notin D\cap U'\}$. (11.3.12)的解可写为

$$u(x) = P_x V_\lambda(\xi_{\tau'}) - P_x\int_0^{\tau'} \gamma(\xi_s)u^\alpha(\xi_s)ds. \quad (11.3.13)$$

于是，由定理11.2.7，

$$\sup_{x\in \overline{D\cap U'},\lambda>0} V_\lambda(x) < \infty.$$

另外，显然 V_λ 关于 λ 关于单调递增，所以 $\lim_{\lambda\to\infty} V_\lambda \triangleq V_0$存在，且在 $\overline{D\cap U'}$上有界. 由控制收敛定理则 V_0满足

$$\begin{cases} Lu(x) - \gamma(x)u^\alpha(x) = 0, x \in D \cap U', \\ u|_{\partial(D\cap U')} = V_0|_{\partial(D\cap U')}. \end{cases} \quad (11.3.14)$$

特别地，$V_0|_{\partial D\cap U'} = h|_{\partial D\cap U'} \equiv 0$. 于是(11.3.10)又可以重写为

$$P^{\delta_x}\{X_\tau(U(a,\varepsilon)^c \cap \partial D) = 0\}$$
$$= \exp\{-V_0(x)\}, x \in D \cap U'. \quad (11.3.15)$$

应用定理11.3.1，

$$\lim_{D\ni x\to a} P^{\delta_x}\{X_\tau(U(a,\varepsilon)^c \cap \partial D) = 0\} = e^0 = 1.$$

证毕. □

注11.3.4 定理11.3.3中的假设 $\inf_{x\in \bar{D}}\gamma(x)>0$是不可缺少的. 否则，结论不一定正确. 比如，若 $\gamma\equiv 0$，上述的非线性方程即退化为线性的 Dirichlet 问题. 而此时 X_τ 是 ξ_τ 首出 D 的分布. 但对于 $a\in \partial D$，

$$P^{\delta_x}\{X_\tau(U(a,\varepsilon)^c \cap \partial D) > 0\} \equiv 1, x \in D. \quad (11.3.16)$$

同样，若 γ 在 D 的靠近边界的一个子区域是恒为零，我们也可以在某些点上进行类似的讨论. 这些反映了线性与非线性的根本区别.

§11.4 超 Brown 运动的模拟

计算机在科学研究领域中的作用越来越大是有目共睹的. 现在大家清楚地认识到，计算机能够帮助人们管理、决策、推理和进行数字处理，但它在理论研究中的作用相比之下就不那么明显. 事实上，计算机在数学理论研究中也表现出强大的威力. 中国科学院

的吴文俊先生开创的计算机几何定理证明理论(又称吴方法),利用计算机进行严密的理论推导,引人注目. 利用计算机进行模拟计算来预见未知理论,已经被许多数学家所采用,从而促进了数学的快速发展.

随机过程的模拟成为当前国际上一个很重要的研究课题,国内很多高校或研究所也相继开展了这方面的工作. 现在人们关心的不仅仅是在计算机上生动的演示,而且更着重去预见问题,解决问题. 近10年来,在随机模拟方面取得了很大的进展,但仍有很多问题有待研究,有许多领域尚未涉及. E. B. Dynkin(1993)在[47]中揭示了超扩散过程与一类非线性偏微分方程的联系. 基于这一理论,我们将利用 Monte Carlo 方法去计算这些非线性偏微分方程的数值解. 为此首先需要对超过程进行模拟. 因此,超 Brown 运动的模拟就成为本节的本题.

以色列的 Robert J. Adler(1994)在[1]中曾经对超 Brown 运动进行模拟. 其模拟方法简单,直观效果也不错,把人们难以捉模的随机过程清楚地在计算机屏幕上展现出来. Adler 在[1]中的一系列附图生动地展示了超 Brown 运动及其演化过程. 然而其模拟的过分简化,虽可以实现一些直观效果,但要以此为基础做进一步的计算却会显得不那么精确. 本文将给出一种超 Brown 运动的模拟方法,它不仅具有很好的直观效果,而且从理论上来讲更精确. 两种模拟方法的差别将在文中做比较性评述.

11.4.1 超 Brown 运动的模拟理论

超 Brown 运动是二分枝的超过程,它有两个基本参数:底过程-Brown 运动与分枝率-控制分枝的快慢. 为了进行模拟,在此先回顾超 Brown 运动的构造理论(见 § 3.2).

考虑分枝粒子系统:在0时刻,在 d 维空间有 k 个粒子,设位置参数为 x. 然后这 k 个粒子各自独立地按照(d-维)Brown 运动的规律进行运动. 对于单个粒子来说,在 t 时刻存活的概率为 e^{-t}. 在它死亡的时刻以1/2的概率消失或以1/2的概率产生两个新粒子.

这两个新粒子在父辈死亡的地方继续按上述规律独立地运动，如此反复．这样刻画的系统就是二分枝的分枝 Brown 运动粒子系统 $Y_t(x,k,\lambda)$．$Y_t(x,k,\lambda)$可以看成 R^d 上取整数值的随机测度．§3.2 已经证明了，$n^{-1}Y_t(x,n,\gamma n)$在测度空间的弱拓扑意义下收敛于一个取测度值的随机过程，即超 Brown 运动 X_t，且 $X_0=\delta_x$，对应的分枝机制为$\frac{\gamma}{2}\lambda^2$．$\delta_x$ 为 x 点的点测度．

11.4.2 超 Brown 运动基本参数过程的模拟

从上节，我们看出超 Brown 运动的模拟涉及 Brown 运动的模拟和指数分布的模拟．下面我们分别论述之．

一维 Brown 运动的模拟． 直线上从0点出发的标准 Brown 运动 B_t 是满足如下条件的连续过程：(i) $B_0=0$．(ii) $B_t\sim N(0,t)$，均值为0，方差为 t 的正态分布．(iii)具有独立增量，即 B_t 与 $B_{t+s}-B_t$ 相互独立，且 $B_{t+s}-B_t$ 与 B_s-B_0同分布．根据 Brown 运动的构造，一维 Brown 运动可由直线上的随机游动来逼近(参见[96])．具体地说，以0点为对称点在直线上以$1/n$ 为长度做分点，这样得到一个点集$\{\cdots,-3/n,-2/n,-1/n,0,1/n,2/n,3/n,\cdots,\}$．直线上的(对称)随机游动 W 是指从0出发，个体(粒子)每一步向左或向右走一步的概率均为1/2．记$\{\eta_i\}_{i\in N}$为独立同分布的伯努利试验序列，并且对任一固定的 i，

$$P(\eta_i=-1)=P(\eta_i=1)=1/2,$$

则随机游动在 m 步时的位置可记为

$$W_m=(1/n)\sum_{i=1}^{m}\eta_i.$$

Itô-McKean(1974)在[96](p38)中证明了，以分布 $W_{[n^2t]}\to B_t$，$n\to\infty$，其中$[n^2t]$表示 n^2t 的最大整数部分．因此 B_t 可由 $W_{[n^2t]}$来近似(当然 n 足够大时)．

上面论述的是古典 Brown 运动的模拟理论．事实上，考虑到我们所取的随机数是(−1,1)区间上的“均匀分布”．为提高模拟效

果，我们在此不采用上述格子点上固定步长的随机游动，而借用上述思想，把随机游动修改为做不等步长（在此称为跃度）的随机游动，其向左向右跳一步的机会均等，但跃度由随机数来决定. 为了增加直观效果与可视性，在实际模拟中把跃度乘上一个公共系数，此系数可以因需要而给定. 容易证明，修改后的随机游动也收敛到标准 Brown 运动（最多相差一个系数，这可以通过取适当的时间尺度使之标准化）. 限于篇幅，详细证明略去.

高维 Brown 运动的模拟　所谓 $d\geqslant 2$维 Brown 运动 $B_t=(B_t^1, B_t^2,\cdots,B_t^d)$就是指它的每个分量均为标准 Brown 运动而且是相互独立的. 因此高维 Brown 运动的模拟可以由 d 个独立的一维 Brown 运动的模拟来实现. 当然，我们这里采用不等步长的模拟方法，而且各分量的跃度系数是一样的.

指数分布的模拟

设 η 服从参数为 λ 的指数分布，即它的分布函数可以写为

$$F_\lambda(\eta < x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geqslant 0.$$

指数分布的模拟方法有很多，这里我们采用 von Neumann 算法来模拟参数为1的指数随机变量. 具体步骤如下：

第一步. 产生(0,1)区间上均匀分布随机数 $U_1,U_2,\cdots$，直到第 $N=\min\{n:U_1\geqslant U_2\geqslant\cdots\geqslant U_{n-1}<U_n\}$步，即当后一个数大于前一个数时停止，且记下该数的序数为 N.

第二步. 如果 N 是偶数，则转至第三步（成功）. 否则 N 是奇数返回第一步（失败）.

第三步. 取 E 为上述过程中第二步失败的次数再加上最后成功时第一个随机数 U_1，

那么 E 即满足参数为1的指数分布. 由于参数为 λ 的指数分布 η 满足 $\lambda\eta$ 是参数为1的指数分布. 根据该对应关系，我们可以模拟任何参数的指数分布. 特别强调的是，上述方法平均只需4.3个随机数就可模拟成功（参见文献[171]，p. 512)，非常有效.

我们知道，计算机只能实现有限步的操作，所以通过计算机不可能实现真正的随机过程. 但如何使得模拟更贴近实际，却是一个

值得考虑的问题.

Adler 的模拟方法

对于平面上超过程的模拟,Adler 的超 Brown 运动模拟是在 $N_1 \times N_1$ 固定的格子点上进行的. 设开始时有 N_2 个粒子,每个粒子在格子点上独立地做随机游动. 所有粒子的生命时都预先给定为 N_3 个时间单位. 粒子经过 N_3 个时间单位后,按照等概率消失或产生两个新粒子的原则判断它的分枝情况. 在每一个时间单位粒子走 M_4(统一给定)步. 然后在事先给定的迭代次数 N_5 范围内观察粒子的演变情况. 对于三维情况,方法是类似的,但借用了 DISSPLA 商用软件包,速度相对慢得多. 显然,这种模拟方法过于简单,不利于进一步的计算. 因为该方法将每一个粒子的寿命(即生命时)都取为相同的 N_3 个时间单位. 而实际上,如上一节所述,粒子的生命时是由一个指数分布决定的,而且相互独立. 并且粒子也不一定在格子点上运动.

一种改进的模拟方法

假设开始时有 L_1(任意给定)个粒子,每个粒子的生命时服从参数为 $1/L_2$ 的指数分布. L_2 的大小决定了粒子生命时的长短. 由于指数分布的取值可能不是整数,我们让它自然取整,所得的整数表示粒子存活的时间单位多少(而不是绝对时间). 然后,在每个单位时间内让粒子做跃度系数为 L_3 的不等步长随机游动. 跃度的大小及方向由随机数决定. 根据实际需要,还可以适当地加进一些控制键,让程序输出所要的结果(如粒子的分布情况,整个运动轨迹(占位时过程的模拟),灭绝时间等). 本文的模拟方法可以实现比 Adler 模拟更多的内容. 但不同的是在本文的模型中粒子运动的自由度相对明显增大,在计算局部时时,需要对 Adler 相应的方法做大的修改.

两种方法上的不同是明显的. 但值得一提的是,在我们的模拟过程中,没有设定迭代步数. 这样在初始粒子数不太大的情况下,可以清楚完整地把系统演化的全过程演示出来. 这是 Adler 的方法所不能做到的. 另一个重要的改进是,虽然模型大大复杂化,而

且远比 Adler 的方法更贴近实际,但我们的方法对于任何维数是通用的.因为即使在三维时也仅需要少量程序用以实现立体效果,仍然可以在微机上实现.

11.4.3 编程与简单评论

所有程序是用C语言编写,在586微机上进行的.当然在做模拟计算时,我们将在 SUN 工作站上进行.对于有兴趣的读者,可向作者索取计算机模拟程序.为了适应以后进行模拟计算的需要,一个重要问题是伪随机数的生成.多少年来人们为此付出了很大精力,可惜的是还没有找到很好的办法.当然,可以通过综合若干种方法来改进单个方法的不足.对此,我们以后将继续探讨.

特别值得一提的是,当开始时粒子数不太多时,可以很快看到粒子系统演化的全过程.系统的灭绝性可以清楚地表现出来.我们也进行了其他方面的模拟试验,效果也都很好,在此略去.

11.4.4 演示结果与说明

二维和三维的模拟如图1-3所示,并分别说明如下.

二维超 Brown 运动的模拟.分别取 $L_1=100$,$L_2=3$,$L_3=7$.三幅图分别对应于第10,50,100个时间单位时的活着粒子的分布情况.大家可以清楚地看出,粒子是逐渐向外扩散的.

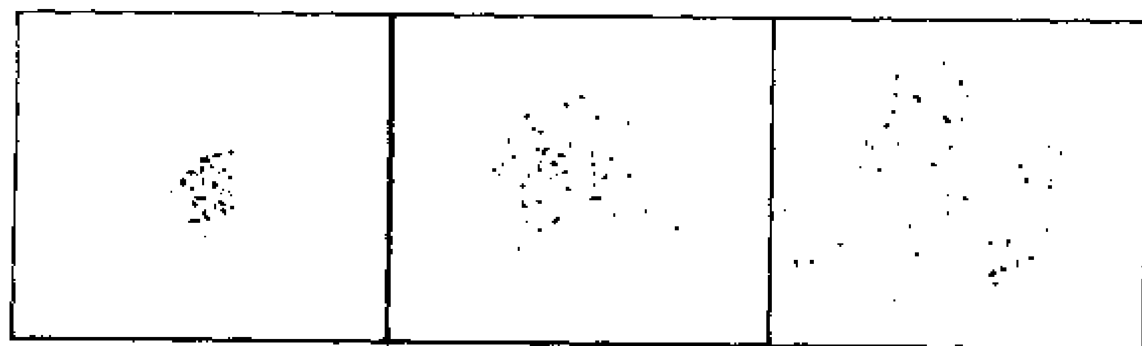


图1

二维超 Brown 运动占位时过程的模拟.分别取 $L_1=100$,$L_2=3$,$L_3=7$.三幅图描述的是在单位时间10、50、100以前的运动

轨迹. 该组图清楚地表明，占位时过程的支撑集要比超过程的支撑集密集的多. 这也完全符合理论结果.

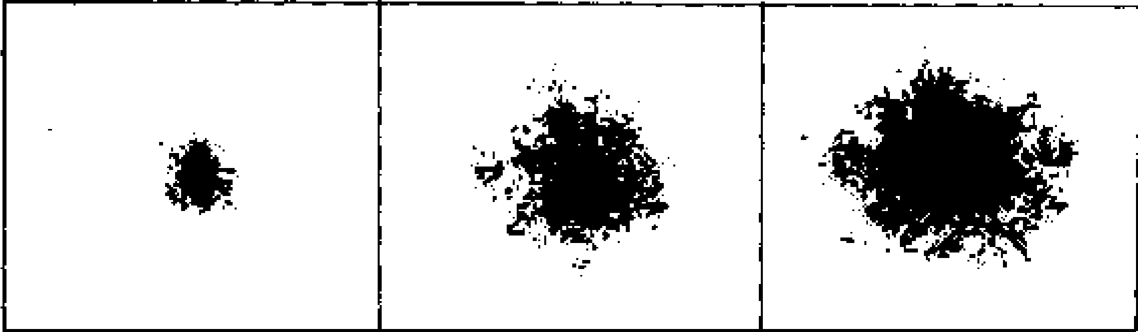


图2

三维超 Brown 运动的模拟. 为了增加立体效果，我们用粒子的大小来刻划粒子纵深距离. 此时我们取 $L_1=50, L_2=3, L_3=7$.



图3

文献评注：§11.1，§11.2主要参考了文献[44]，[45]，[47]及[48]. §11.3主要参考了文献[44]和[227]. §11.4取材于文献[112].

第十二章 几类超过程简介

在[41]中，超过程被分为三类：Dawson-Watanabe(DW)超过程、Fleming-Voit(FV)超过程和Ornstein-Uhlenbeck(OU)超过程。它们都是测度值过程，分别取值于非负测度集、概率测度集和符号测度(Schwartz 分布)集，但只有 DW-超过程具有分枝性.它也是人们研究最多的一种测度值过程.实际上，在没有特别说明的情况下，通常所说的超过程均是指 DW-超过程，人们也常称之为测度值分枝过程.本书之所以称为《测度值分枝过程引论》，而不是《超过程引论》正是为了更清楚地界定本书的内容.

三种超过程是以各不相同的实际背景引入的.前面我们已经对 DW-超过程进行了较系统的探讨，相信读者对此已有相当的了解.但从现在掌握的资料来看，DW-超过程的命名有些失之偏颇，因为在 D. A. Dawson(1975,1977)[17,18]，S. Watanabe(1968)[209]之前，捷克的 Jirina(1958,1964)在[100]和[101]对测度值分枝过程已经有过很多的研究.关于 FV-超过程的开创性工作属于 W. H. Fleming，M. Viot(1979)[76].对此，我们将在§12.2作较全面的介绍.OU-超过程是 R. A. Holley，D. W. Stroock(1978)[89]引入的，有关的进展可参见文献[147].三种超过程虽有本质的不同，但它们可以归结为某个粒子系统对不同问题而进行的不同的空间-时间尺度变换的高密度极限(见以下各节).因此，它们之间存在着内在的、紧密的联系.

近年来，三种超过程都受到广泛关注，各自的理论发展相当快.比如，DW-超过程发展了很多研究分支，如迁入(移民)超过程(superprocesses with immigration)、多物种超过程(superprocesses with multitypes)、多水平超过程(multi-level superprocesses)、带催化剂超过程(superprocesses with catalysts)以及交互超过程

(superprocesses with interaction)等. 有关内容可分别参考李增沪(1994)、叶俊(1993)及 Y. Wu(1992)的博士论文和 D. A. Dawson,王永进、郭军义、赵学雷等的系列工作. 另一方面,在超过程的进一步研究上,也取得了很大进展,如唐加山(1997)在[186]和[187]关于流形上超 Brown 运动的研究. 从数学上来讲,这是一个很有意义的开端. 张新生(1991)、杨春鹏(1994)、李存行(1994)、鲍玉芳(1995)、郭军义(1995)、张连增(1996)、刘震(1997)及任艳霞(1998)等人的博士论文都有比较深刻的结果. 因篇幅所限,不能在此一一详细介绍.

本章分为三节,我们将分别就具有交互作用测度值分枝过程(DW-超过程的一种推广)、FV-超过程和 OU-超过程做比较系统的介绍.

§12.1 交互测度值分枝过程

交互测度值分枝过程是 DW-型超过程的一种自然推广. 实际上,随着超过程研究的不断深入以及实际情况的需要,又有许多新问题出现. 例如,在具有交互作用的模型中,已有的理论就不能够描述和刻划粒子系统中粒子及其极限过程的运动规律. 根据达尔文(Darwin)的人口进化理论,物种之间的交互作用是普遍的,所以研究交互粒子系统及其相关过程更具有实际意义,这也许正是越来越多的人对此感兴趣的主要原因.

12.1.1 交互分枝粒子系统模型

考虑粒子系统$(x_t^i, i\in I_t)$. 它按如下机制运动:在初始状态下它的分布由有限测度 μ_0所表示,每个粒子的运动服从一个非齐次的 Feller 过程. 它的生成元为 $A(\mu_t)$,即粒子在时刻 t 以后的运动可能依赖 t 时的整个系统的状态 $\mu_t=\sum_{i\in I_t}\delta_{x_t^i}$. 在经过一段时间(生命时)之后,它在位置 x 的死亡率为 $\lambda(x,\mu_t)$,同时(随机)生成

若干个后代，再生率为 p(依赖系统的状态 μ_t 和位置 x). 这时我们假设：

• $\lambda: E\times M_F(E)\to\mathbb{R}_+,(x,\mu)\to\lambda(x,\mu)$是可测函数，表示当系统状态为 μ 时，粒子在位置 x 时的死亡率.

• 再生率 $p: N\times E\times M_F(E)\to\mathbb{R}_+$是可测函数. 当系统状态为 μ,粒子在位置 x 死亡时产生 k 个后代的概率为 $p_k(x,\mu)$. 若记

$$m(x,\mu)=\sum_{k\in N}kp_k(x,\mu),v^2(x,\mu)=\sum_{k\in N}(k-1)^2p_k(x,\mu),$$

有

$$\sup_{x\in E,\mu\in M_F(E)}m(x,\mu)<+\infty;\quad \sup_{x\in E,\mu\in M_F(E)}v^2(x,\mu)<+\infty.$$

下面我们以 $\lambda(\mu),m(\mu)$ 和 $v^2(\mu)$分别表示映射 $x\to\lambda(x,\mu)$, $x\to m(x,\mu)$和 $x\to v^2(x,\mu)$.

• $C_b(E)$上的 Feller 半群的生成元簇记为 $A(\mu)_{\mu\in M_F(E)}$. 假设每个算子的定义域均包含一个与 μ 无关的在 $C_b(E)$中稠的向量空间 $\mathscr{D}$,并且包含常值函数，即 $A(\mu)1=0$. 进一步假设 $A(\mu)$满足：

1. $\forall f\in\mathscr{D},\exists K>0,\forall \mu\in M_F(E),\|A(\mu)f\|_\infty\leqslant K\langle\mu,1\rangle$.

2. $\forall f\in\mathscr{D}$,函数 $\mu\to\langle\mu,A(\mu)f\rangle$是连续的.

特别地，当 $E=\mathbb{R}^d$ 时，下面的二阶椭圆算子满足上述假设.

$$A(\mu)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}[a_{ij},\mu]\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_i[b_i,\mu]\frac{\partial}{\partial x_i}\quad(\mathscr{D}=C_b^2(\mathbb{R}^d)),$$

其中$[a,\mu](x)=\int_{\mathbb{R}^d}a(x,y)\mu(dy)$;$a(x,y)$及$b(x,y)$在$\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$上连续一致有界.

对于上面所描述的粒子系统，我们可以把 μ_t 看成由下面算子 L 生成的点测度值过程.

对于 $F\in C_b^2(\mathbb{R}),f\in\mathscr{D},\mu\in M_F(E)$,柱集函数 $F_f(\mu)=F(\langle f,\mu\rangle)$使得

$$LF_f(\mu)=L_dF_f(\mu)+L_bF_f(\mu),$$

其中

$$L_dF(\mu)=F'(\langle\mu,f\rangle)\langle\mu,A(\mu)f\rangle$$

$$+\frac{1}{2}F''(\langle\mu,f\rangle)\langle\mu,A(\mu)f^2-2fA(\mu)f\rangle$$

以及

$$L_bF(\langle\mu,f\rangle)$$
$$=\sum_{k\geq 0}\langle\mu(.),\lambda(.,\mu)p_k(.,\mu)[F_f(\mu+(k-1)\delta_.)-F_f(\mu)]\rangle.$$

这里，L_d 描述的是过程的扩散机制(连续部分)，而 L_b 则描述的是过程的分枝机制(跳部分).

在 Skorokhod 空间 $D([0,\infty),M_F(E))$上，我们可以构造一个概率测度 P,使得

$$\forall\ F\in C_b^2,\forall\ f\in\mathscr{D},F_f(X_t)-F_f(X_0)-\int_0^t(L_d+L_b)F_f(X_s)ds$$

是一个 P-局部鞅. 特别地，

$$\langle X_t,f\rangle-\langle X_0,f\rangle-\int_0^t\langle X_s,A(X_s)f+\lambda(X_s)(m(X_s)-1)f\rangle ds$$

是一个 P-局部鞅，其变差过程为

$$\int_0^t\langle X_s,A(X_s)f^2-2fA(X_s)f+\lambda(X_s)v^2(X_s)f^2\rangle ds.$$

这时我们称满足上面条件的(X_t,P)为具有参数(A,λ,m,v^2)的交互分枝 Markov 过程. 值得一提的是，这里所谓的"交互作用"强调的是粒子的运动、粒子的分枝与空间整体状态之间的关系，现又常常称之为 mean-field 交互作用，而不仅是通常理解的粒子之间的相互作用. 这不仅仅是技术上的需要，而且有很强的实际背景.

12.1.2 交互测度值过程

与古典的 DW-超过程类似，交互测度值过程也可以由交互粒子系统的(标准化的)高密度极限来得到. 为详细地说明这一问题，我们考虑一列交互分枝 Markov 过程 X^n,它们的分枝率和粒子的质量分别按照一定的速率趋于无穷和0. 而再生率 $p^{(n)}$依赖于 n 但具有有限变差. 则在轨道空间中，过程 $X_t:=\varepsilon_n\sum_{i\in I_t^n}\delta_{x_i^n}$的概率

律 P_n 所满足的鞅问题为:$\forall\ F\in C_b^2(\mathbb{R})$,$\forall\ f\in\mathscr{D}$,

$$F_f(X_t)-F_f(X_0)-\int_0^t L_nF_f(X_s)ds \tag{12.1.1}$$

是一个 P_n-局部鞅,其中

$$\begin{aligned}L_nF(\mu)= & F'(\langle\mu,f\rangle)\langle\mu,A(\mu)f\rangle \\ & +\frac{\varepsilon_n}{2}F''(\langle\mu,f\rangle)\langle\mu,A(\mu)f^2-2fA(\mu)f\rangle \\ & +\sum_{k\geqslant 0}\langle\mu(\cdot),\frac{1}{\varepsilon_n}\lambda_n(\cdot,\mu)p_k^{(n)}(\cdot,\mu) \\ & \times[F_f(\mu+\varepsilon_n(k-1)\delta)-F_f(\mu)]\rangle.\end{aligned}$$

在如下假设下:

(a)$\inf_{\mu\in M_F(E)}\lambda_n(\mu)\to+\infty$.

(b)$\lambda_n(\mu)(m_n(\mu)-1)$关于 $\mu\in M_F(E)$一致地收敛到 $b(\mu)\in C_b(E)$.

(c)$\varepsilon_n\to 0$.

(d)$\varepsilon_n\lambda_n(\mu)v_n^2(\mu)$关于 $\mu\in M_F(E)$一致地收敛到 $c(\mu)\in C_b^+(E)$,而且

$$\sup_{\mu\in M_F(E)}\|c(\mu)\|_\infty<+\infty.$$

那么 P_n 弱收敛到一个概率测度 P,使得,$\forall\ F\in C_b^2$,$\forall\ f\in\mathscr{D}$,

$$\begin{aligned}F_f(X_t)-F_f(X_0)-\int_0^t[\langle X_s,(A(X_s)+b(X_s))f\rangle F'(\langle X_s,f\rangle) \\ +\langle X_s,\frac{c(X_s)}{2}f^2\rangle F''(\langle X_s,f\rangle)]ds\end{aligned} \tag{12.1.2}$$

是一个 P-局部鞅.特别地,上式中若取 $F_f(\mu)=\langle\mu,f\rangle$,则有

$$\langle X_t,f\rangle-\langle X_0,f\rangle-\int_0^t\langle X_s,(A(X_s)+b(X_s))f\rangle ds$$

是一个连续的平方可积鞅,而且其变差过程为 $\int_0^t\langle X_s,c(X_s)f^2\rangle ds$.

上述过程的构造可参见 Méléard-Roelly(1990)的文章[142].在过程的轨道连续性的证明中,她们应用了 Bakry-Emery 引理(参见文献[5]),而不是通常的 Kolmogorov 引理.这里的粒子逼近的方法给我们提供一个对于交互测度值过程的直观理解.但做为

鞅问题，一般来说，唯一性仍悬而未决. 利用历史 Brown 运动(historical Brownian motion)的新理论，对于 $A(\cdot)\equiv\triangle$ 以及具有 Lipschitz 性的交互作用率 b 和分枝率 c，Perkins(1992)在[160]中得到了交互超 Brown 运动的存在唯一性. Dawson(1993)在[19]中在算子 A 与测度无关，分枝率 c 为常数的情况下，而把交互作用强度 b 放宽到有界可测，由古典的 DW-超过程和 Girsanov 变换的方法，证明了鞅问题(12.1.2)的存在唯一性(参见文献[19]，第十章). 实际上，这时若记古典 DW-超过程的概率律 P_0，即它满足

$$\forall f\in\mathscr{D},\langle M_t,f\rangle:=\langle X_t,f\rangle-\langle X_0,f\rangle-\int_0^t\langle X_s,Af\rangle ds \tag{12.1.3}$$

是一个 P_0-局部鞅，其变差过程为 $\int_0^t\langle X_s,cf^2\rangle ds$. 令

$$Z(t):=\exp\left\{\int_0^t\int_E b(X_s,x)M(ds,dx)-\frac{c}{2}\int_0^t\int_E[b(X_s,x)]^2X_s(dx)ds\right\}.$$

这里 $M(ds,dx)$ 是由(12.1.3)中的鞅测度 M_t 生成. 则我们有 $P\ll P_0$，而且 $dP/dP_0=Z(t)$. 到目前为止，一个证明鞅问题唯一性的重要技巧是构造相应测度值过程的对偶过程. 但构造有关对偶过程实在是没有可行的一般方法.

12.1.3 一类交互测度值分枝过程的矩估计

我们知道，对于古典的 DW-超过程，它可以由 Laplace 泛函决定. 这种性质(即所谓的 log-Laplace 性)为我们计算超过程的矩提供了方便. 更重要的是它还使我们能够应用许多现成的分析知识. 然而对于交互测度值过程，上述性质一般不复存在，这就给我们研究这类测度值过程造成很多困难. 从而使已有的方法很多不再有效，需要寻找新的方法和工具.

一般情况下，矩的计算是一个很大的问题. 下面我们将针对底过程为 Brown 运动的情况，给出满足(12.1.1)的鞅问题的各阶矩

估计. 实际上,文献[234]中证明了如下结果.

定理12.1.1 如果 $b<K, c\leqslant C<\infty$,那么对于 $f_i\in\mathscr{B}_{\cdot}(E)$, $i=1,2,\cdots,n$和 $t\geqslant 0$,

$$P^{\mu}\prod_{i=1}^{n}\langle X_t,f_i\rangle \leqslant e^{Knt}\prod_{i=1}^{n}\langle \mu,S_tf_i\rangle + C\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\int_0^t e^{Kn(t-s)}$$
$$\times P^{\mu}\langle X_s,S_{t-s}f_iS_{t-s}f_j\rangle\prod_{k\neq i,j}\langle X_s,S_{t-s}f_k\rangle ds, \qquad (12.1.4)$$

其中 S_t 是$\mathbb{R}^d$ 中 Brown 运动的转移半群.

对于一般情况,应用鞅性质,我们得到如下的(测度)偏微分不等式:

$$\frac{\partial}{\partial t}M_n(t,\mu,dx_1,dx_2,\cdots,dx_n)$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\Big[(A+\tilde{b})_i^* M_n(t,\mu,dx_1,dx_2,\cdots,dx_n)$$
$$+\sum_{j\neq i}^{n}\tilde{c}(x_i)M_{n-1}(s,\mu,dx_1,\cdots,dx_{j-1},dx_{j+1},\cdots,dx_n)\delta_{x_i-x_j}\Big]. \qquad (12.1.5)$$

其初始条件为

$$M_n(0,\mu,dx_1,dx_2,\cdots,dx_n)=\prod_{i=1}^{n}\mu(dx_i),$$

这里

$$\tilde{b}(x)=\sup_{\mu\in M_F(E)}b(\mu,x),\ \tilde{c}(x)=\sup_{\mu\in M_F(E)}c(\mu,x).$$

$(A+\tilde{b})_i^* M_n(t,\mu,dx_1,\cdots,dx_n)$意指 E^n 上的测度使得对于任意的 $f_i\in\mathscr{B}(E), i=1,2,\cdots,n$,

$$\int_{E^n}\prod_{i=1}^{n}f_i(x_i)(A+\tilde{b})_i^* M_n(t,\mu,dx_1,dx_2,\cdots,dx_n)$$
$$=\int_{E^n}(A+\tilde{b}(x_i))f(x_i)\prod_{j=1,j\neq i}^{n}f_j(x_j)$$
$$\times M_n(t,\mu,dx_1,dx_2,\cdots,dx_n).$$

不幸的是,要解不等式(12.1.2),我们没有发现现成的理论. 而且其本身也正是现代数学研究的热点之一. 由此可见,我们面临的困

难是显而易见的.但如果我们对它施加某些限制,也可以得到一些初步结果.

假设12.1.2 对于 E 上的 Feller 过程 ξ,若存在一个 E 上的 σ-有限测度 $\mathscr{L}$ 使得

1. 过程 ξ 相对于 $\mathscr{L}$ 转移密度 $p_t(x,y)$ 存在.

2. 转移密度 $p_t(x,y)$ 为 A-对称的,即 $Ap_t(\cdot,y)|_x = Ap_t(x,\cdot)|_y$.

3. 算子 A 的比较定理成立,即对于任意固定的 $f:\mathscr{R}_+\times E\times\mathscr{R}_+\to\mathscr{R}_+$,如果 $\bar{u}(t,x)$ 及 $\underline{u}(t,x)\in\mathscr{D}(A)$ 满足

$$\dot{\bar{u}}(t,x)-A\bar{u}(t,x)+f(t,x,\bar{u})\geqslant 0,$$

$$\dot{\underline{u}}(t,x)-A\,\underline{u}(t,x)+f(t,x,\underline{u})\leqslant 0;$$

$$\sup_{t\leqslant s,x\in E}|\bar{u}(t,x)|+|\underline{u}(t,x)|<\infty,\text{任意 } s<T;$$

$$\bar{u}(0,x)\geqslant\underline{u}(0,x),\ x\in E,$$

那么在$(0,T)\times E$ 上有 $\bar{u}(t,x)\geqslant\underline{u}(t,x)$.

在上述假设下,类似于文献[234],我们可以得到不等式(12.1.4),不过这时需要把 S_t 换成 ξ_t 的转移半群.

进一步的问题是基于如下的观察.以 S_t^b 表示具有位势 b 的 Schrödinger 半群,即

$$u(t,x)\triangleq S_t^b f(x)=E_x e^{\int_0^t b(\xi_s)ds}f(\xi_t)$$

是如下 Schrödinger 方程的唯一解:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x)=Au(t,x)+b(x)u(t,x)\\ u(0,x)=f.\end{cases}$$

在一定条件下,更精细的结论是

$$P^\mu\prod_{i=1}^n\langle X_t,f_i\rangle\leqslant\prod_{i=1}^n\langle\mu,S_t^bf_i\rangle$$

$$+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1,j\neq i}^n P^\mu\int_0^t\langle X_s,\bar{c}S_{t-s}^bf_iS_{t-s}^bf_j\rangle\prod_{k\neq i,j}\langle X_s,S_{t-s}^bf_k\rangle ds.\quad(12.1.6)$$

对于一般情况,我们还不能证明上式.但当 b 和 c 均独立于 μ 时,式(12.1.6)是成立的(见定理3.5.1).

12.1.4 交互测度值分枝 Brown 运动的绝对连续性

做为随机测度的一个典型问题，绝对连续性一直备受人们关注. 而研究这一问题的前提是要知道它的二阶以上的矩估计. 由于交互测度值过程的精确矩估计是一个难点，所以在这方面没有太大的进展. Méléard-Roelly(1990)在[142]中把它列为一个开问题. 对于 Brown 运动、或对称的扩散过程，解决了这个问题(见上节). 事实上，我们有(参见文献[234]，[235]和[136])

定理12.1.3 设 X_t 为具有有限交互作用(即 b,c 是有界函数)的测度值分枝 Brown 运动，则对于任意的 $t>0$，X_t 相对于 Lebesgue 测度几乎处处绝对连续. 而且其密度函数 $X_t(x)$ 满足随机微分方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}X(t,x) = \sqrt{\tilde{c}(X(t,x))X(t,x)}\,\dot{W}_t(x) + AX(t,x) + \bar{b}(X(t,x))X(t,x), \quad (12.1.7)$$

其中 $\dot{W}(t,x)$ 是"时空白噪声"，而

$$\bar{b}(X(t,x)) := b(x,X_t),$$
$$\tilde{c}(X(t,x)) := c(x,X_t).$$

上面的结果可以推广到更一般的情况. 首先，我们必须得到一般情况下的矩估计. 注意到上节的讨论，在假设12.1.2下，如果再设：存在 $0<\beta<1$ 使得

$$\forall\, T>0, \sup_{0\leqslant t\leqslant T,\, x,y\in E} p_t(x,y)t^{\beta} < +\infty,$$

可以同样证明下面的定理.

定理12.1.4 由鞅问题(12.1.2)给出在正时刻($t>0$)的交互测度值过程 X_t 是相对于参考测度 $\mathscr{L}$ 几乎处处绝对连续的.

若绝对连续性成立，密度随机场 $X(t,x)$，$t\geqslant 0$，$x\in E$ 是否关于 t，x 有连续修正？在一定条件下，李增沪在[136]中证明了上述密度随机场 $X(t,x)$ 的联合连续性.

§12.2 Fleming-Viot 测度值过程

做为一类重要的超过程，FV-超过程多年来也是人们关注的对象. 尤其是近两年，引起了广泛的兴趣，已经成为超过程研究的前沿. 本节来介绍 FV-超过程的一些进展.

通过对于中性选择群体中个体(基因)频率分布的研究，1979 年 Fleming-Viot 引入了概率测度值过程，我们简称之为 FV-超过程. Dawson-Hochberg(1982)[26]在个体(基因)的突变服从 Brown 运动时给出了有关 FV-超过程的一些定量行为. 随后几年中，虽然有关 FV-超过程的文章相对于 DW-超过程而言不是很多，但也有一些重要工作. 比如文献[110]，[41]，[192]，[193]，[86]，[59]，[62]和[151]等等. 最近又有一系列 FV-超过程的工作出现，因篇幅所限，不能在此一一列举，详见文献[236].

下面我们来系统考察一下有哪些问题可以解决. 为此我们必须对已有的成果给一个大致的介绍.

12.2.1 FV-超过程的构造

我们从较广泛的形式开始，首先叙述一个基本模型.

设 S 是一个可数的群体集合，$E=\{X_1,\cdots,X_d\}$ 表示任一群体中可能的物种的种类. 对于固定 $k\in S$，物种的频率描述为 d-维向量

$$\overline{p}^{(k)}=(p_1^{(k)},\cdots,p_d^{(k)}),$$

其中 $p_i^{(k)}$ 表示在群体 k 中物种 X_i 的频率，即有 $p_1^{(k)}+\cdots+p_d^{(k)}=1$.

令

$$\Sigma=\left\{\vec{p}=\left\{\overline{p}^{(k)};\overline{p}^{(k)}=(p_1^{(k)},\cdots,p_d^{(k)}),\right.\right.$$
$$\left.\left.0\leqslant p_i^{(k)}\leqslant 1,\sum_{i=1}^{d}p_i^{(k)}=1,k\in S\right\}\right\}.$$

所谓的阶梯石(stepping stone)模型最初是一个离散时间的 Σ- 值

Markov 链，它是在突变、选择和移民(交互作用)机制下进行演变的.

Sato(1983)给出了阶梯石模型的一个扩散逼近，Shiga(1982)讨论了其基本性质，它是如下算子所对应鞅问题的解. 对于 $F \in C^2(\Sigma \to \mathbb{R}_+)$,

$$\mathscr{G}F(\vec{p}) = \sum_{k\in S}\sum_{i=1}^{d}\{L_i(\vec{p}^{(k)}) + H_i(\vec{p}^{(k)}) + \sum_{k'\in S} m_{k'k} p_i^{(k')}\} \frac{\partial}{\partial p_i^{(k)}} F(\vec{p})$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k\in S}\gamma_k \sum_{i,j=1}^{d} p_i^{(k)}(\delta_{ij} - p_j^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial p_i^{(k)} \partial p_j^{(k)}} F(\vec{p}), \tag{12.2.1}$$

其中 γ_k 是正常数，且对于 $\vec{p} = (p_1, \cdots, p_d)$,

$$L_i(\vec{p}) = \sum_{j=1}^{d} \theta_{ji} p_j,$$

$$H_i(\vec{p}) = p_i\Big(\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} p_j - \sum_{j,l=1}^{d} \sigma_{jl} p_j p_l\Big),$$

而且上面系数满足

$$\theta_{ij} \geqslant 0,\ i \neq j,\ \theta_{ii} = -\sum_{j\neq i} \theta_{ij},$$
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji},\ i, j = 1, \cdots, d,$$
$$m_{k'k} \geqslant 0,\ k' \neq k,$$
$$m_{kk} = -\sum_{k'\neq k} m_{k'k},\ \sup_{k\in S} |m_{k'k}| < \infty. \tag{12.2.2}$$

按照人口理论如上算子可以解释为：对于 $i \neq j$, θ_{ij} 表示物种 X_i 到物种 X_j 的突变率(mutation rate)；σ_{ij} 表示 (X_i, X_j) 的选择强度；对于 $k' \neq k$, $m_{k'k}$ 表示从群体 k' 到群体 k 的移入率(migration rate)或称之为(群体之间的)交互作用率(interaction rate). 有关二阶导数项体现了随机交配繁殖的作用.

记 $\mathscr{P}(E)$ 是 E 上的概率测度的全体，令

$$\tilde{\mathscr{P}} = (\mathscr{P}(E))^S = \{\tilde{\mu} = \{\mu_k; \mu_k \in \mathscr{P}(E), k \in S\}\}.$$

考虑1-1映射 $\varrho: \Sigma \mapsto \tilde{\mathscr{P}}; \vec{p} \to \{\sum_{i=1}^{d} p_i^{(k)} \delta_{X_i}\}_{k\in S}$. 我们可以把 Σ-值过程(形式上记为 $\{\vec{p}(t) = \{\vec{p}^{(k)}(t)\}_{k\in S}, t \geqslant 0\}$)和 $\tilde{\mathscr{P}}$-值过程(形式

上记为$\{\widetilde{\mu}(t)=\{\mu_k(t)\}_{k\in S};t\geqslant 0\}$建立如下的1-1对应：

$$\mu_k(t)=\sum_{i=1}^{d}p_i^{(k)}(t)\delta_{X_i}.$$

考虑$\widetilde{\mathscr{P}}$上形如

$$\Phi(\widetilde{\mu})=\prod_{i=1}^{m}\langle f_i,\mu_{k_i}\rangle,m\in N,f_i:E\to\mathbb{R},k_i\in S$$

的函数

算子$\mathscr{G}$在映射ϱ的作用下生成一个算子$\widetilde{\mathscr{G}}$，直接计算即得它在Φ上的作用为

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathscr{G}}\Phi(\widetilde{\mu})=&\sum_{i=1}^{m}\{\langle Lf_i,\mu_{k_i}\rangle+\langle R_{k_i},f_i\rangle\\&+\sum_{k'\in S}m_{k'k_i}\langle f_i,\mu_{k'}\rangle\}\prod_{j\neq i}\langle f_j,\mu_{k_j}\rangle\\&+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m,k_i=k_j}\gamma_{k_i}\langle Q_{k_i},f_if_j\rangle\prod_{l\neq i,j}^{m}\langle f_l,\mu_{k_l}\rangle,\end{aligned}\qquad(12.2.3)$$

其中

$$Lf_i(X_i)=\sum_{j=1}^{d}\theta_{ji}f(X_j),f\in\mathscr{B}(E),$$

$$\sigma(X_i,X_j)=\sigma_{ij},$$

$$(\sigma\cdot f)(X,Y)=\sigma(X,Y)f(Y);\ X,Y\in E,$$

$$Q_{k_i}(\mu_{k_i};dx,dy)=\delta_x(dy)\mu_{k_i}(dx)-\mu_{k_i}(dx)\mu_{k_i}(dy),$$

$$R_{k_i}(\mu_{k_i},dx)=\int_E\int_E\sigma(y,z)\mu_{k_i}(dz)Q_{k_i}(\mu_{k_i};dx,dy).$$

显然，对于更一般的空间E，我们也可以同样定义$\mathscr{G}$，这就使得我们能够把上述模型加以推广．设E为一个紧距离空间，$\mathscr{P}(E)$是E上Borel概率的全体，带有弱*拓扑，$\widetilde{\mathscr{P}}=(\mathscr{P}(E))^S$具有乘积拓扑．设$L$是$C(E)$的一个稠密子空间$\mathscr{D}(L)$上的线性算子，对应于一个Feller半群．对称函数$\sigma\in b\mathscr{B}(E\times E)$．移民率$m_{k'k}$，除满足(12.2.2)外，再假设

$$M^*=\sup_{k\in S}\left|\sum_{k'\neq k}m_{k'k}\right|<\infty.$$

下面我们将给出对应于$\widetilde{\mathscr{G}}$的FV-超过程的鞅构造．设

$$\mathscr{A} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} \Phi: \Phi(\tilde{\mu}) = F(\langle f_1, \mu_{k_1} \rangle, \cdots \langle f_m, \mu_{k_m} \rangle), m \in N, \\ F \text{ 是 } m \text{ 个变量的多项式}, f_i \in \mathscr{D}(L), k_i \in S \end{array} \right\}.$$

首先可以证明,子空间 $\mathscr{A}$ 在上确界范数下是 $C(\widetilde{\mathscr{P}})$的稠子集.

再记 $C([0,\infty),\widetilde{\mathscr{P}})$为$[0,\infty)$到 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 连续函数的全体,$D([0,\infty),\widetilde{\mathscr{P}})$是通常 Skorokhod 空间,坐标过程$\{\tilde{\mu}(t)=\{\mu_k(t)\}_{k\in S};t\geq 0\}$(在 $\Omega=C([0,\infty),\widetilde{\mathscr{P}})$或 $D([0,\infty),\widetilde{\mathscr{P}})$上)定义为 $\tilde{\mu}(t,\omega)=\omega(t)$,$\omega\in\Omega$. 定义 σ-域

$$\mathscr{F} = \sigma(\tilde{\mu}(s), s \geq 0);\ \mathscr{F}_t = \sigma(\tilde{\mu}(s), 0 \leq s \leq t), t \geq 0.$$

根据文献[60],我们定义鞅问题如下.

定义12.2.1 给定 $\tilde{\mu}^0\in\widetilde{\mathscr{P}}$. 我们称$(C([0,\infty),\widetilde{\mathscr{P}}),\mathscr{F})$(相应地$(D([0,\infty),\widetilde{\mathscr{P}}),\mathscr{F})$)上的概率测度 P 是 $C([0,\infty),\widetilde{\mathscr{P}})$(相应地,$D([0,\infty),\widetilde{\mathscr{P}})$)上关于$(\widetilde{\mathscr{G}},\tilde{\mu}^0)$的鞅问题的解,如果它满足

$$P(\tilde{\mu}(0) = \tilde{\mu}^0) = 1,$$

以及对于任何的 $\Phi\in\mathscr{A}$,

$$\Phi(\tilde{\mu}(t)) - \int_0^t \widetilde{\mathscr{G}}\Phi(\tilde{\mu}(s))ds$$

是一个$(P,\mathscr{F}_t)$-鞅.

对于如上的鞅问题,K. Handa(1990)在[86]中证明了其解的存在唯一性. 存在性的证明基于离散逼近的方法. 通过胎紧性(tightness)的讨论,来说明离散逼近的序列是弱收敛的,从而构造出满足上面鞅问题的一个解. 然而,唯一性的证明依赖于在函数空间 $C(E^S)$中构造出一个$\{\tilde{\mu}(t),P_{\tilde{\mu}}\}_{\tilde{\mu}\in\widetilde{\mathscr{P}}}$的对偶过程$\{f(t),P_f\}_{f\in C(E^S)}$(不依赖于 $\tilde{\mu}$ 而只与算子 L 有关),具有如下的性质:

$$E_{\tilde{\mu}}\langle\tilde{\mu}(t),f\rangle = E_f\langle\tilde{\mu},f(t)\rangle, t \geq 0.$$

由此可以得到 $\tilde{\mu}(t)$的唯一性.

下面给出几种特殊的FV-超过程的例子.

例1(Vaillancourt 的交互 FV-超过程) 当 S 中元素的个数 $|S|=r$是有限正整数,$L=\triangle$时,Vaillancourt(1990)研究了具有如下形式算子的概率测度值过程.

$$\widetilde{\mathscr{G}}F(\widetilde{\mu}) = \sum_{j=1}^{r}\Big[\eta_j\int_E \triangle \frac{\partial F(\widetilde{\mu})}{\partial \mu_j(x)}\mu_j(dx)$$
$$+ \gamma_j\int_{E\times E}\frac{\partial^2 F(\widetilde{\mu})}{\partial\mu_j(x)\partial\mu_j(y)}Q(\mu_j;dx,dy)$$
$$+ \gamma_j\sum_{k=1}^{r}q_{jk}\int_E\frac{\partial F(\widetilde{\mu})}{\partial\mu_j(x)}(\mu_k-\mu_j)(dx)\Big], \qquad (12.2.4)$$

其中

$$\frac{\partial F(\widetilde{\mu})}{\partial\mu_j(x)} = \lim_{\epsilon\to 0}(F(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{j-1},\mu_j+\epsilon\delta_x,\mu_{j-1},\cdots,\mu_r)$$
$$- F(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{j-1},\mu_j,\mu_{j+1},\cdots,\mu_r))/\epsilon,$$
$$F(\widetilde{\mu}) = \langle f_1^{(1)},\mu_1\rangle\cdots\langle f_1^{(k_1)},\mu_1\rangle\cdots\langle f_r^{(1)},\mu_r\rangle\cdots\langle f_r^{(k_r)},\mu_r\rangle.$$

为了说明(12.2.4)是(12.2.3)的一个特殊情况，我们取 $\sigma\equiv 0$及

$$m_{jk} = \gamma_j q_{jk}, j\neq k,$$
$$m_{jj} = -\sum_{k=1,k\neq j}^{r}\gamma_j q_{jk} = -\sum_{k=1,k\neq j}^{r} m_{jk}.$$

例2(具有选择的 FV-超过程) 对于单一群体 $|S|=1$，取

$$\mathscr{D}(\mathscr{G}) = \{F;F(\mu) = f(\langle\mu,\phi\rangle),\phi\in D(L),f\in bC^\infty(\mathbb{R})\}.$$

若 $F\in\mathscr{D}(\mathscr{G})$，令

$$\mathscr{G}_R F(\mu) = f'(\langle\mu,\phi\rangle)(\langle\mu,L\phi\rangle + \langle R(\mu),\phi\rangle)$$
$$+ \iint f''(\langle\mu,\phi\rangle)\phi(x)\phi(y)Q(\mu;dx,dy),$$

这里

$$Q(\mu;dx,dy) = \gamma[\delta_x(dy)\mu(dx) - \mu(dx)\mu(dy)],$$
$$R(\mu,dx) = \int_E\Big[\int_E\sigma(y,z)\mu(dz)\Big]Q(\mu;dx,dy),$$

其中 $\sigma\in B(E^2)$. $\mathscr{G}_R$ 对应的概率测度值过程称为具有选择强度为 σ 的 FV-型超过程(参见文献[19], § 10.1.1).

12.2.2 一类 FV-超过程

有关 FV-超过程比较深刻的结果是在单一群体($|S|=1$)及自然选择($\sigma\equiv 0$)的情况下得到的. 我们假设 $|S|=1,\sigma\equiv 0,E=\mathbb{R}^d$,

$L=-(-\triangle)^{\alpha/2}, 0<\alpha\leqslant 2$(即指数为 α 的分数幂拉普拉斯算子). 这时 FV-超过程对应的算子为

$$\mathscr{G}F(\mu)=D\sum_{i=1}^{n}f_{y_i}(\langle\phi_1,\mu\rangle,\cdots,\langle\phi_n,\mu\rangle)\langle L_{\phi_i},\mu\rangle$$

$$+\gamma\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}f_{y_iy_j}(\langle\phi_1,\mu\rangle,\cdots,\langle\phi_n,\mu\rangle)$$

$$\times[\langle\phi_1\phi_2,\mu\rangle-\langle\phi_1,\mu\rangle\langle\phi_2,\mu\rangle], \qquad (12.2.5)$$

这里 D,γ 为正常数.

记 $\{X_t,t\geqslant 0\}$ 是(12.2.5)中算子所对应的 FV-超过程.

12.2.2.1 矩过程

令 $M_n(s,\mu;t;dx_1,\cdots,dx_n)$ 表示当 $X_s=\mu$ 时 X_t 的 k **阶矩测度**,即

$$E_{s,\mu}\phi_1(X_t)\cdots\phi_n(X_t)=\underbrace{\int_E\cdots\int_E}_{n}\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)M_k(s,\mu;t;dx_1\cdots dx_n).$$

由文献[26]和[231]我们知道,

$$M_n(s,X_s;t;dx_1\cdots dx_n)=k_{t-s}*\prod_{i=1}^{n}X_s(dx_i)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\int_s^t k_{u-s}*[M_{n-1}(s,X_s;u;dx_1\cdots$$

$$dx_{j-1}dx_{j+1}\cdots dx_n)\delta(x_i-x_j)]du,$$

其中 * 表示卷积,而且

$$k_t(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}p_t^{\alpha}(x_i)\exp(-\gamma n(n-1)t).$$

$p_t^{\alpha}(x)$ 表示 α-平稳对称过程的转移密度.

经验矩过程(empirical moment processes)定义为

$$x(t)=(x_1(t),\cdots,x_d(t))$$

其中 $x_i(t)=\int_{R^d}x_iX_t(dx), i=1,\cdots,d$. 同样可以定义**经验协变差过程**(empirical covariance processes):

$$v_{ij}(t)=\int_{R^d}x_ix_jX_t(dx)-x_i(t)x_j(t),$$

及高阶经验中心矩，

$$R_{k_1,\cdots,k_d}(t)=\int_{\mathbb{R}^d}\prod_{i=1}^{d}(x_i-x_i(t))^{k_i}X_t(dx).$$

这里 $k_1,\cdots,k_d$ 均是非负整数. 设 $N_0=\sum_{i=1}^{d}k_i$，有如下的结果，

定理12.2.2 对于 $L=\triangle$，假设

$$\int|x|^{N_0}\mu(dx)<\infty.$$

那么

(a)对于$0\leqslant t<\infty$，$E_\mu R_{k_1,\cdots,k_d}(t)<\infty$.

(b)极限 $\lim_{t\to\infty}R_{k_1,\cdots,k_d}(t)=r_{k_1}\cdots r_{k_d}$存在且有限.

更多的有关 $x_i(t)$，v_{ij}的结果可参见文献[26].

12.2.2.2 局部结构

当线性算子 $L=\triangle$时，Dawson-Hochberg(1982)[26]，Konno-Shiga(1988)[116]研究了相应的FV-超过程的局部结构.

定理12.2.3 假设初始测度 X_0具有紧支撑，那么，(a)对于固定的 $t\geqslant0$，X_t 以概率1也有紧支撑. (b)对于 $d\geqslant3$，$t>0$，X_t 之支撑集具有不大于2的 Hausdorff 维数. (c)当 $d=1$，对于 $t>0$，几乎处处的 X_t 是相对于$\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度绝对连续的，而且其密度关于$(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$ 有联合的连续修正.

值得注意的是，当 $L=-(-\triangle)^{\alpha/2}$时，若$1<\alpha\leqslant2$，上面的结论(c)仍成立.

12.2.2.3 占位时过程

在文献[231]中研究了一类FV-超过程的占位时过程，即 $Y_t=\int_0^t X_s ds$. 当 $L=-(-\triangle)^{\alpha/2}$，$0<\alpha\leqslant2$时，证明了如下的结论，

定理12.2.4 (a)若 $d>\alpha$，则几乎所有的 Y_t 淡收敛于一个σ-有限随机测度；若 $d\leqslant\alpha$，则存在 $\gamma(t)$使得在淡收敛意义下 $\lim_{t\to\infty}E_\mu\gamma(t)^{-1}Y_t=\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度，其中

$$\gamma(t) = \begin{cases} p^{\alpha}(0)\log t, & d/\alpha = 1; \\ p^{\alpha}(0)\dfrac{\alpha}{\alpha - d}t^{1-d/\alpha}, & d/\alpha < 1. \end{cases}$$

(b)若 $d<2\alpha$ 及初始测度 μ 满足条件:

$(t,x) \to \int_{\mathbb{R}^d} p_t^{\alpha}(x-y)\mu(dy)$ 是 $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ 联合连续的,那么存在随机场 $\{Y(t,x), t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^d\}$ 使得

(1)对于任意 $\beta < (2-d/\alpha) \wedge (\alpha - d/2) \wedge 1/2$, $Y(t,x)$ 是关于 (t,x) 联合 β-Hölder 连续的.

(2)对于任何的 $\phi \in C_K(\mathbb{R}^d)$ 和 $t \geqslant 0$,

$$\langle Y_t, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} Y(t,x)\phi(x)dx.$$

12.2.3 尺度变换定理

我们假设 X_t 是所谓的交互 FV-超过程,即它由算子(12.2.4)所决定.这时过程所在的概率空间是 $D([0,\infty)\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)^r)$. 令

$$\chi_t^n(dx) = X_{n^2 t}(ndx), \; n \in N.$$

即对于 $(\mathbb{R}^d)^r$ 上的有界连续函数 f,

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^r} f(x)\chi_t^n(dx) \triangleq \int_{(\mathbb{R}^d)^r} f(x)X_{n^2 t}(ndx).$$

特别地,对于 $(\mathbb{R}^d)^r$ 中的有界可测集 B, $\chi_t^n(B) \triangleq X_{n^2 t}(nB)$. 显然, χ_t^n 是一个随机测度值过程序列. Vaillancourt(1990)在[193]中证明了如下的定理.

定理12.2.5 如果 χ_0^1 在无穷远点没有质量,那么 χ^n 在 $D([0,\infty), \mathscr{P}((\mathbb{R}^d)^r))$ 中弱收敛于一个(具有原子质量的)测度值过程 χ_∞.

更详细地,若采用(12.2.4)中的记号,以及假设 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中标准的 Brown 运动. 令

$$q_{jk}^n = \begin{cases} q_{jk}/n, & j \neq k; \\ 1 - \dfrac{1}{n}\sum_{l=1, l \neq j} q_{jl}, & j = k. \end{cases}$$

如果$\lim_{n\to\infty}n^2 q_{il}^n=\psi_{il}\in[0,\infty),i\neq l$，那么$\chi_\infty=(\delta_{\alpha_i(t)})_{i=1}^r$，由下面递推公式给出：

$$\alpha_i(t)=\beta_i(2\eta_i t)-\beta(2\eta_i\tau_k^i)+\alpha_{u(i,k)}(\tau_k^i-),t\in[\tau_k^i,\tau_{k+1}^i).$$

这里$\{u(i,k):i=1,2,\cdots,r;k=0,1,2,\cdots\}$是一簇相互独立的随机变量，且满足

$$P(u(i,k)=j)=\begin{cases}1/r,1\leqslant i,j\leqslant r,k=0,1,2,\cdots,\\ \qquad 若\ i:\sum_{l=1}^r\psi_{il}=0;\\ \psi_{ij}/\sum_{l=1}^r\psi_{il},1\leqslant i,j\leqslant r,k=0,1,2,\cdots,\\ \qquad 其他，且这时\ \psi_{jj}=0,1\leqslant j\leqslant r.\end{cases}$$

而且$0\leqslant\tau_0^i<\tau_1^i<\cdots$是随机变量，使得$\{\tau_{k+1}^i-\tau_k^i,k=0,1,2,\cdots,\}$为相互独立的参数为$(\gamma_i\sum_{l=1}^r\psi_{il})^{-1}$的指数分布.

特别地，当$r=1$时，$\chi_\infty(t)=\delta_{\beta(t)}$，这里$\beta$为标准 Brown 运动.

自然地，我们不难想象上述定理可以推广到$|S|=\infty$的情况，或许证明不太容易. 但这是一个有趣的问题，留给读者考虑. 进一步，我们也可以考虑把上述定理推广到更一般的空间E及过程类β.

12.2.4 FV-超过程与 DW-超过程的关系

大家熟知，古典的 DW-超过程和古典的 FV-超过程有着密切的联系. 这种现象首先由 Konno-Shiga(1988)[110]发现，Etheridge-March(1991)在[57]中给出了严格的证明，再由 Perkins(1992)在[152]中推广到更一般的形式. 从粒子系统的观点来看，这种联系有着很强的直观性，然而严格去证明它并非易事.

对于交互作用的测度值过程，类似的问题值得讨论. 对于一般情形我们没有找到合适的方法. 但是对于下面一类具有交互作用的测度值过程，我们得到了类似的结果. 具体来说，考虑由如下鞅问题决定的测度值过程X_t：$\forall F\in bC^2(\mathbb{R}),\forall f\in\mathscr{D}(A),F_f(\nu):=F(\langle\nu,f\rangle)$，

$$F_f(X_t) - F_f(X_0) - \int_0^t [\langle X_s, (A + b(X_s)f)F'(\langle X_s, f\rangle)$$

$$+ \langle X_s, \frac{1}{2}f^2\rangle F''(\langle X_s, f\rangle)]ds \qquad (12.2.6)$$

是一个 P-局部鞅. 其中 b 为仅仅依赖整体质量的有界连续函数，即 $b(X_s)=b(X_s(1))$. 按照粒子系统来解释，这就意味着粒子的交互作用只与系统的整体质量有关而与粒子所在的位置无关.

取

$$P^{\mu,T,\varepsilon}(\cdot) = P^\mu(\cdot \mid |X_t(E) - 1| < \varepsilon, 0 \leqslant t \leqslant T).$$

我们有(参见文献[238])

定理12.2.6 对于固定的 $T>0$，如果 $\varepsilon_n \to 0_+, T_n \uparrow T < \infty$ 以及 μ_n 弱收敛到概率测度 μ，那么条件概率律 $P^{\mu_n,\varepsilon_n,T_n}$ 弱收敛到 Fleming-Viot 测度值过程的概率律 Q^μ，即 Q^μ 是下面鞅问题的唯一解：

$$\begin{cases} Q^\mu(X_0 = \mu) = 1; \\ \forall f \in \mathscr{D}(A), M_t(f) = \langle X_t, f\rangle - \langle X_0, f\rangle - \int_0^t \langle X_s, Af\rangle ds \end{cases}$$

是平方可积 Q^μ-鞅，其变差过程为 $\frac{1}{2}\int_0^t [X_s(f^2) - (X_s(f))^2]ds$.

显然这里对 b 施加的条件很强，更一般的问题是交互 DW-超过程和具有选择的 FV-测度值过程之间是否也有这种联系？从粒子系统的观点来看，这种联系也是应该存在的. 具体来讲，引入记号

$$Q(\mu; dx, dy) = \gamma(x)\delta_x(dy)\mu(dx),$$

$$R(\mu, dx) = \int_E \left[\int_E \sigma(y, z)\mu(dz)\right] Q(\mu; dx, dy).$$

取 $b(x, \mu) = \int_E \sigma(x, y)\mu(dy)$，我们可以把对应的交互测度值过程的鞅问题重写为 $\forall\, F \in bC^2(\mathbb{R}), \forall\, f \in \mathscr{D}(A), F_f(\mu) = F(\langle \mu, f\rangle)$，

$$F_f(X_t) - F_f(X_0) - \int_0^t \Big[\langle X_s, Af\rangle F'(\langle X_s, f\rangle)$$

$$+ R(f)F'(\langle X_s, f\rangle) + \frac{1}{2}Q(X_s; f, f)F''(\langle X_s, f\rangle)\Big]ds$$

是一个 P^{μ}-局部鞅. 这里

$$R(f)=\int_{E^2}\left[\int_E \sigma(y,z)\mu(dz)\right]f(x)Q(\mu;dx,dy),$$

$\sigma: E\times E\to\mathbb{R}$ 称之为**交互作用率**.

交互作用的测度值过程与具有选择的 FV-超过程的一般算子形式(12.2.3)相比较，两类过程是非常很相似的. 唯一的不同之处是他们的**波动泛函** $Q(\mu;dx,dy)$. 从已有的结果及定理12.2.6来看，我们有理由相信这两类测度值过程之间的联系是普遍的. 但给出一个肯定的回答和严格的证明仍是一个开问题.

12.2.5 简单讨论

在§12.2.3和§12.2.4，我们已经提出了两方面的问题. 事实上，需要考虑的问题仍很多. 首先，从过程的构造来看，尽管 FV-超过程已有较广泛的形式，但不是不可以进一步推广，例如，我们还可以考虑移民率(或交互作用率)m_{kk}和地理位置有关的情况. 其次，§12.2.2中的结果是在较强的假设下得到的，显然我们可以对更一般的 FV-超过程考虑相应的问题. 由于许多问题的研究依赖于矩估计. 然而群体之间的交互作用及群体内部选择的作用势必导致具体计算上的困难，这就需要寻找一些简便的方法和技巧. 另外，对于一些问题也可以考虑用 DW-超过程的知识过渡到 FV-超过程上去，当然这种方法必须建立在这两类过程已有的关系上. 再次，FV-超过程的极限性质及其位势理论(局部时，极集，重点，自交性等)方面的结论很少. 相比之下，DW-超过程在该方面已有较完整的理论. 最后，值得注意的是在 FV-超过程的研究中，引入了偶合方法，相信这一方法会在研究 FV-超过程的极限理论和更广泛过程的构造上有所作为.

§12.3 OU-超过程

OU-超过程指的是 Ornstein-Uhlenbeck 超过程. 它是一类取

Schwartz 分布值的高斯 Markov 过程，具有着很强的生物、物理背景. 众所周知，许多生物、物理问题，例如基因遗传，细菌繁殖，原子束的裂变和宇宙射线的级联等等，都可以在数学上归结为一个特定分枝粒子系统的演化. 而研究分枝粒子系统的演化最重要问题之一是如何从单个粒子的微观运动来刻画粒子系统的宏观运动，如宏观的整体流(大数行为)和围绕整体流的波动(中心极限行为). OU-超过程正是由分枝粒子系统取波动极限得到的. 我们先从分析的角度给出 OU-超过程的定义.

设 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 表示 Schwartz 速降函数空间，$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ 表示 Schwartz 分布空间. 又 $(T_t^r)_{t\geq r\geq 0}$ 为 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 上强连续的有界线性算子半群，$(Q_t(\cdot,\cdot))_{t\geq 0}$ 是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 上连续正定的二次型族.

定义 12.3.1 称取值于 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ 的 Markov 过程 $\{X_t,t\geq 0\}$ 为 OU-超过程，如果其转移函数的特征泛函为

$$P_{r,\mu}\exp[i\langle X_t,\varphi\rangle] = \exp\left\{i\langle\mu,T_t^r\varphi\rangle - \frac{1}{2}\int_r^t Q_s(T_t^s\varphi)ds\right\}, \tag{12.3.1}$$

$0\leq r\leq t$，$\mu\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$，$\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$，其中 $P_{r,\mu}$ 为 r 时从 μ 出发的 (X_t) 的分布.

上述定义是 E. B. Dynkin(1989)在[41]中给出的，较全面地概括了已有的结果. 为了便于直观理解，我们考察 OU-超过程的分枝粒子系统的波动极限构造. 设 $\{N(t),t\geq 0\}$ 为分枝粒子系统，它是取整数测度值的 Markov 过程. $N(t,A)$ 表示粒子系统在 $t\geq 0$ 时刻位于 $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 中的粒子个数(参见文献[147]). 如果对上述粒子系统 $\{N(t),t\geq 0\}$ 做如下空间-时间尺度变换：

$$\mathbb{R}^d\ni\ x\mapsto kx,\ [0,\infty)\ \ni\ t\mapsto k^\alpha t.$$

$\alpha>0$ 是常数. 令 $\{N^k(t),t\geq 0\}$ 表示尺度变换之后的分枝粒子系统：$t\geq 0$，$\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$，

$$\langle N^k(t),\varphi\rangle = \langle N(k^\alpha t),\varphi(\cdot/k)\rangle.$$

再定义

$$X^k(t) = k^{-\beta}\{N^k(t) - EN^k(t)\}.$$

对某些 $\alpha,\beta>0$,在一定条件下可以证明(参见文献[30]和[147],第二章),$\{X^k(t),t\geqslant 0\}$ 在 $D(\mathbb{R}_+,\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$ 中弱收敛于 OU-超过程 $\{X_t,t\geqslant 0\}$.

另一方面,OU-超过程也可作为 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ 空间上的某些广义 Langevin 方程的解(参见文献[89]).实际上,Holley-Stroock 首先用鞅问题方法证明了 OU-超过程的存在性.

设 $A:\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\mapsto\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 为有界线性算子,它在 $L(\mathbb{R}^d)$ 上有非正定的自伴扩张 $\overline{A}$. 又设 $(T_t:t\geqslant 0)$ 为 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 上有界线性算子的强连续半群. A 是 (T_t) 的无穷小算子. 令 $\Omega=C(\mathbb{R}_+,\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$, $\mathscr{F}_t=\sigma\{\langle X_s,\varphi\rangle:0\leqslant s\leqslant t,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\}$, $t\geqslant 0$(其中 (X_t) 为坐标过程), $\mathscr{F}=\sigma(\bigcup_{t\geqslant 0}\mathscr{F}_t)$. 再设 $B:L^2(\mathbb{R}^d)\mapsto L^2(\mathbb{R}^d)$ 为有界线性算子.

定理12.3.2 对每个 $\mu\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$,存在唯一概率测度 P^μ,满足 $P^\mu(X(0)=\mu)=1$,且对 $\forall\ f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 有

$$f(\langle X_t,\varphi\rangle) - \int_0^t\langle X_u,A_\varphi\rangle f'(\langle X_u,\varphi\rangle)du$$
$$- \frac{1}{2}\|B_\varphi\|^2\int_0^t f''(\langle X_u,\varphi\rangle)du$$

关于 $(\Omega,\mathscr{F}_t,P^\mu)$ 为鞅. 进一步,对 $\forall\ 0\leqslant s<t$, $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$, P^μ-a.s. 有

$$\begin{aligned}&P^\mu(\langle X_t,\varphi\rangle\in A\,|\,\mathscr{F}_s)\\&\quad=\int_A g\Big(\int_0^{t-s}\|BT_u\varphi\|^2du,\,y-\langle X_s,T_{t-s}\varphi\rangle\Big)dy,\end{aligned}$$

其中 $g(a,y)=(2\pi a)^{-\frac{1}{2}}e^{-y^2/2a}$.

Holley-Stroock(1978)[89] 进一步证明了在概率簇 $\{P_\mu\}$ 下坐标过程 $\{X_t,t\geqslant 0\}$ 具有 Markov 性,其转移函数的特征泛函为(12.3.1). 并且,OU-超过程是下述广义 Langevin 方程的解:

$$dX_t = \frac{\Delta}{2}X_t dt + dW_t,$$

其中 W_t 是标准西格尔(Siegel)过程.

人们通过对分枝粒子系统的波动极限做不同的尺度变换,可

以得到不同的极限过程. 当然,不同的分枝粒子系统更可以导出迥异的结果. 有关 OU-超过程进一步的研究可参见文献[147],[148]及其中所列的参考文献.

参考文献

[1] R. J. Adler, Superprocesses: the particle picture, CRM Proceedings and Lecture Notes, 1994, 5, 1—15.

[2] D. J. Aldous, Stopping time and tightness, Ann. Probab., 1978, 6, 335—340.

[3] D. J. Aldous, Asymptotic fringe distributions for general families of random trees, Ann. Appl. Probab., 1991, 1, 228—266.

[4] K. B. Athreya and P. E. Ney, Branching Processes, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1977.

[5] D. Bakry and M. Emery, Diffusions hypercontractives, Séminaire de Probabilités XIX, LNM 1123, Springer-Verlag, Berlin, 1985, 177—206.

[6] 鲍玉芳, 超 Ornstein-Uhlenbeck 过程的性质及其他, 北京师范大学博士论文, 1995.

[7] Bao Yufang, Supports of super Ornstein-Uhlenbeck processes, Chin. Sci. Bull. 1995, 40.4, 289—293.

[8] M. T. Barlow, S. N. Evans and E. A. Perkins, Collision local time and measure-valued processes, Can. J. Math., 1993, 43, 897—938.

[9] P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, John Wiley, 1958.

[10] R. M. Blumenthal and R. K. Getoor, Markov Processes and Potential Theory, Academic Press, New York, 1968.

[11] H. Brezis and A. Friedman, Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions, J. Math. Pure Appl., 1983, 62, 73—97.

[12] Z. Ciesielski and S. J. Taylor, First passage times and sojourn times for Brownian motion and exact Hausdorff measure of the sample path, Trans. Amer. Math. Soc., 1962, 103, 434—450.

[13] J. T. Cox and D. Griffeath, Occupation times for critical branching Brownian motions, Ann. Probab., 1985, 13, 1108—1132.

[14] C. Cutler, A Lebesgue decomposition theorem for random measures and random measure processes, Tech. Report 23, LRSP, Carleton University, 1984.

[15] 戴永隆, 随机测度绝对连续性和奇异性的注, 数学年刊, 1982, 3. 241—246.

[16] Yu. Dalecky and S. Fomin, The Measures and Differential Equations in Infinite Dimensional Spaces, Kluwer, 1991.

[17] D. A. Dawson, Stochastic evolution equations and related measure-valued processes, J. Multivariate Analysis, 1975, 5, 1—52.

[18] D. A. Dawson, The critical measure diffusion, Z. Wahr. Verw. Geb., 1977, 40, 125—145.

[19] D. A. Dawson, Measure-valued Markov Processes, LNM 1541, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 1-260.

[20] D. A. Dawson and K. Fleischmann, Critical branching in a highly fluctuating random medium, Probab. Th. Rel. Fields, 1991, 90, 241—274.

[21] D. A. Dawson and K. Fleischmann, Diffusion and reaction caused by point catalysts, SIAM J. Appl. Math., 1992, 52, 163—180.

[22] D. A. Dawson and K. Fleischmann, A super-Brownian motion with a single point catalyst, Stoch. Proc. Appl., 1994, 49, 3—40.

[23] D. A. Dawson, K. Fleischmann, R. D. Foley and L. A. Peletier, A critical measure-valued branching process with infinite mean, Stoch. Anal. Appl., 1986, 4, 117—129.

[24] D. A. Dawson, K. Fleischmann and S. Roelly, Absolute continuity of the measure states in a branching model with catalysts, Seminar on Stochastic Processes, 1990, Birkhäuser, Boston, 1991, 117—160.

[25] D. A. Dawson and K. J. Hochberg, The carrying dimension of a stochastic measure diffusion, Ann. Probab., 1979, 7, 693—703.

[26] D. A. Dawson and K. J. Hochberg, Wandering random measures in the Fleming-Viot model, Ann. Probab., 1982, 10, 554—580.

[27] D. A. Dawson and K. J. Hochberg, Function-valued duals for measure-valued processes with applications, Contemporary Mathematics, 1985, 41, 55—69.

[28] D. A. Dawson and K. J. Hochberg, A multilevel branching model, Adv. Appl. Probab., 1991, 23, 701—715.

[29] D. A. Dawson, I. Iscoe and E. A. Perkins, Super-Brownian motion: path properties and hitting probabilities, Probab. Th. Rel. Fields, 1989, 83, 135—205.

[30] D. A. Dawson and B. G. Ivanoff, Branching diffusions and random measures, Stochastics Processes, eds. A. Joffe and P. Ney, Dekker, New York, 1978.

[31] D. A. Dawson and T. G. Kurtz, Applications of duality to measure-valued processes, Lecture Notes in Control and Inform Sci., 1982.

[32] D. A. Dawson, Y. Li and C. Mueller, The support of measure-valued branching processes in a random environment, Ann. Probab., 1995, 23, 1692—1718.

[33] D. A. Dawson and E. A. Perkins, Historical processes, Memoirs of the American Mathematical Society, 93, No. 454, 1991.

[34] C. Dellacherie and P. A. Meyer, Probabilités et Potentiel: Théorie discréte du

potentiel, Hermann, Paris, 1983.

[35] P. Donelly and T. G. Kurtz, A countable representation of the Fleming-Viot measure-valued diffusion, Ann. Probab., 1996, 24.2, 698—743.

[36] J. L. Doob, Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984.

[37] E. B. Dynkin, Markov Processes, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1965.

[38] E. B. Dynkin, Representation for functionals of superprocesses by multiple stochastic integrals with applications to self intersection local times, Astérisque, 1988, 158, 147—171.

[39] E. B. Dynkin, Superprocesses and their linear additive functionals, Trans. Amer. Math. Soc., 1989, 314, 255—282.

[40] E. B. Dynkin, Regular transition functions and regular superprocesses, Trans. Amer. Math. Soc., 1989, 316, 623—634.

[41] E. B. Dynkin, Three classes of infinite dimensional diffusions, J. Funct. Anal., 1989, 86, 75—110.

[42] E. B. Dynkin, Branching particle systems and superprocesses, Ann. Probab., 1991, 19, 1157—1194.

[43] E. B. Dynkin, Path Processes and historical superprocesses. Probab. Th. Rel. Fields, 1991, 90, 1—36.

[44] E. B. Dynkin, A probabilistic approach to one class of nonlinear differential equations, Probab. Th. Rel. Fields, 1991, 89, 89—115.

[45] E. B. Dynkin, Superdiffusions and parabolic nonlinear differential equations, Ann. Probab., 1992, 20, 942—962.

[46] E. B. Dynkin, On regularity of superprocesses, Probab. Th. Rel. Fields, 1993, 95, 263—281.

[47] E. B. Dynkin, Superprocesses and partial differential equations, Ann. Probab., 1993, 21, 1185—1262.

[48] E. B. Dynkin, An Introduction to Branching Measure-valued Processes, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[49] E. B. Dynkin and S. E. Kuznetsov, Markov snakes and Superprocesses, Probab. Theory Related Fields, 1995, 103.4, 433—476.

[50] E. B. Dynkin and S. E. Kuznetsov, Superdiffusions and removable singularities for quasi-linear partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 1996, 49, 125—176.

[51] E. B. Dynkin and S. E. Kuznetsov, Solutions of $Lu = u^{\alpha}$ dominated by L- harmonic functions, J. Anal. Math. 1996, 68, 15—37.

[52] E. B. Dynkin and S. E. Kuznetsov, Natural linear additive functionals of superprocesses, Ann. Probab., 1997, 25.2, 640—661.

[53] E. B. Dynkin and S. E. Kuznetsov, Nonlinear parabolic P. D. E. and additive functionals of superdiffusions, Ann. Probab., 1997, 25.2, 662—701.

[54] E. B. Dynkin, S. E. Kuznetsov and A. V. Skorokhod, Branching measure-valued processes, Probab. Theory Related Fields, 1994, 71, 85—116.

[55] N. El Karoui and S. Méléard, Martingale measures and stochastic calculus, Probab. Th. Rel. Fields, 1990, 84, 83—101.

[56] N. El Karoui and S. Roelly-Coppoletta, Proprietes de martingales, explosion et representation de Lévy-Khinchine d'une classe de processus de branchement á valeurs measures, Stoch. Proc. Appl., 1991, 38, 239—266.

[57] A. Etheridge and P. March, A note on superprocesses, Probab. Th. Rel. Fields, 1991, 89, 141—147.

[58] S. N. Ethier and R. C. Griffiths, The neutral two locus model as a measure-valued diffusion, Adv. Appl. Probab., 1990, 22, 773—786.

[59] S. N. Ethier and R. C. Griffiths, The transition function of a Fleming-Viot process, Ann. Probab., 1993, 21, 1571—1590.

[60] S. N. Ethier and T. G. Kurtz, Markov Processes: Characterization and Convergence, Wiley, 1985.

[61] S. N. Ethier and T. G. Kurtz, The infinitely many neutral alleles diffusion model, Adv. Appl. Probab., 1981, 13, 429—452.

[62] S. N. Ethier and T. G. Kurtz, Fleming-Viot processes in population genetics, SIAM J. Control Optim., 1993, 31, 345—386.

[63] S. N. Evans, Trapping a measure-valued branching process conditioned on non-extinction, Ann. Inst. Henri Poincaré, 1991, 27, 215—220.

[64] S. N. Evans, The Entrance space of a measure-valued Markov branching process conditioned on non-extinction, Can. Math. Bull., 1992, 35.1, 70—74.

[65] S. N. Evans and E. A. Perkins, Measure-valued Markov branching processes conditioned on non-extinction, Israel J. Math., 1990, 71, 329—337.

[66] S. N. Evans and E. A. Perkins, Absolute continuity results for superprocesses with some applications, Trans. Amer. Math. Soc., 1991, 325, 661—681.

[67] S. N. Evans and E. A. Perkins, Measure-valued branching diffusions with singular interaction, Can. J. Math., 1994, 46, 120—168.

[68] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, 2, Wiley, New York, 1971.

[69] P. J. Fitzsimmons, Construction and regularity of measure-valued branching

processes, Israel J. Math., 1988, 64, 337－361.

[70] P. J. Fitzsimmons, Correction to Construction and regularity of measure-valued branching processes, Israel J. Math., 1991, 73, 127.

[71] P. J. Fitzsimmons, On the martingale problem for measure-valued Markov branching processes, Seminar on Stochastic Processes, eds. E. Cinlar, K. L. Chung and M. J. Sharpe, Birknäuser, Boston, 1991.

[72] K. Fleischmann, Critical behavior of some measure-valued processes, Math. Nachr., 1988, 135, 131－147.

[73] K. Fleischmann and J. Cärtner, Occupation time process at a critical point, Math. Nachr., 1986,125,275－290.

[74] K. Fleischmann and J. F. Le Gall, A new approach to the single point catalytic super-Brownian motion, Probab. Th. Rel. Fields, 1995, 102, 63－82.

[75] K. Fleischmann and C. Mueller, A super-Brownian motion with a locally infinite catalytic mass, Probab. Th. Rel. Fields, 1997, 107. 3, 325－358.

[76] W. H. Fleming and M. Viot, Some measure-valued Markov processes in population genetics theory, Indiana Univ. Math. J., 1979, 28, 817－843.

[77] A. Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.

[78] 龚光鲁,随机微分方程引论,北京大学出版社,1987.

[79] L. G. Gorostiza and J. A. López-Mimbela, The multitype measure branching process, Adv. Appl. Probab., 1990, 22, 49－67.

[80] L. G. Gorostiza and S. Roelly-Coppoletta, Some properties of the multitype measure branching process, Stoch. Proc. Appl., 1990, 37, 259－274.

[81] L. G. Gorostiza and A. Wakolbinger, Persistence criteria for a class of critical branching particle systems in continuous time, Ann. Probab., 1991, 19, 266－288.

[82] Guo Junyi(郭军义), Super-Brownian Motion with a General Branching Mechanism and Super-Brownian Motion on the Sierpinski Gasket, Dissertation, Nankai University, 1995.

[83] Guo Junyi(郭军义), Some path properties of Brownian and super-Brownian motion on the Sierpinski gasket, Acta Math. Scientia, 1997, 17(2),143－150.

[84] Guo Junyi(郭军义),Super-Brownian motion on the Sierpinski gasket with point catalytic medium, In: Trends in Probability and Related Analysis, World Scientific, to appear.

[85] Guo Junyi(郭军义), On the local extinction of super-Brownian motion on the Sierpinski gasket, Science in China, 1997, to appear.

[86] K. Handa, A measure-valued diffusion process describing the stepping stone model with infinitely many alleles, Stoch. Proc. Appl, 1990, 36, 269—296.

[87] T. E. Harris, The Theory of Branching Processes, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1963.

[88] 何声武,汪嘉冈,严加安,半鞅与随机分析,北京,科学出版社,1995.

[89] R. A. Holley and D. W. Stroock, Generalized Ornstein-Uhlenbeck processes and infinite particle branching Brownian motion, Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ., 1978, 14, 741—788.

[90] 黄志远、严加安,无穷维随机分析学基础,科学出版社,1997.

[91] N. Ikeda, M. Nagasawa and S. Watanabe, Branching Markov processes I, II, III, J. Math. Kyoto Univ., 1968, 8, 233--278, 9, 95—160.

[92] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[93] I. Iscoe, A weighted occupation time for a class of measure-valued critical branching Brownian motion, Probab. Th. Rel. Fields, 1986, 71, 85—116.

[94] I. Iscoe, Ergodic theory and a local occupation time for measure-valued branching processes, Stochastics, 1986, 18, 197--243.

[95] I. Iscoe, On the supports of measure-valued critical branching Brownian motion, Ann. Probab., 1988, 16, 200—221.

[96] K. Itô and H. P. Mckean, Diffusion Processes and Their Sample Paths, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[97] B. G. Ivanoff, The multitype branching diffusion, J. Mult. Anal, 1981, 11, 289—318.

[98] A. Jakubowski, On the Skorokhod topology, Ann. Inst. H. Poincaré, 1986, B22, 263—285.

[99] 坚雄飞,超 Ornstein-Uhlenbeck 过程局部灭绝时的概率分布,预印本,1997.

[100] M. Jiřina, Stochastic branching processes with continuous state space, Czechoslovak Math. J., 1958, 8, 292—313.

[101] M. Jiřina, Branching processes with measure-valued states, Trans. Third Prague Conf. on Inform Th., 1964, 333--357.

[102] A. Joffe and M. Métivier, Weak convergence of sequences of semimartingales with applications to multitype branching processes, Adv. Appl. Probab., 1986, 18, 20—65.

[103] I. Kaj and P. Salminen, On the ultimate value of local time of one-dimensional super-Brownian motion, Stoch. Proc. Appl., 1995, 59.1, 21--42.

[104] O. Kallenberg, Random Measures, Academic Press, London, 1983.

[105] I. Karatzas and S. E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[106] K. Kawazu and S. Watanabe, Branching processes with immigration and related limit theorems, Th. Probab. Appl., 1971, 26, 36–54.

[107] M. Kimura, The Neutral Theory of Molecular evolution, Cambridge Univ. Press, 1983.

[108] J. F. Kingman, Exchangeability and the evolution of large populations, Exchangeability in Probability and Statistics, eds. G. Koch and F. Spizzichino, North Holland, 1982.

[109] A. N. Kolmogorov and N. A. Dmitriev, Branching stochastic processes, Doklady, 1947, 56, 5—8.

[110] N. Konno and T. Shiga, Stochastic differential equations for some measure-valued diffusions, Probab. Th. Rel. Fields, 1988, 79, 201—225.

[111] J. Lamperti, Continuous state branching processes, Bull. Amer. Math. Soc., 1967, 73, 382—386.

[112] 劳兰君，超布朗运动的模拟，汕头大学学报，1997，12.2，38—42.

[113] T. Y. Lee, Some limit theorems for super-Brownian motion and semilinear differential equations, Ann. Probab., 1993, 21, 979—995.

[114] T. Y. Lee and W. M. Ni, Global existence, large time behavior and life span of solutions of a semilinear parabolic Cauchy problem, Trans. Amer. Math. Soc., 1992, 333.1, 365—378.

[115] T. Y. Lee and B. Remillard, Large deviations for the three-dimensional super-Brownian motion, Ann. Probab., 1995, 23, 1755—1771.

[116] J. F. Le Gall, Marches aléatoires, mouvement brownien et processes de branchement, Séminaire de probabilitiés XX. LNM, 1372, 1989, 258—274.

[117] J. F. Le Gall, Brownian excursion, trees and measure-valued branching processes, Ann. Probab., 1991, 19, 1399—1439.

[118] J. F. Le Gall, A class of path-valued Markov processes and its applications to superprocesses, C. R. Acad. Sci. Paris, 1991, 309, Série, I, 377—381.

[119] J. F. Le Gall, A class of path-valued Markov processes and its applications to superprocesses, Probab. Th. Rel. Fields, 1993, 95, 25—46.

[120] J. F. Le Gall, Hitting probabilities and potential theory for the Brownian path-valued processes, Ann. Inst. H. Poincaré, 1994, 44, 277—306.

[121] J. F. Le Gall, The Brownian snake and solutions of $\triangle u = u^2$ in a domain, Probab. Th. Rel. Fields, 1995, 102, 393—432.

[122] J. F. Le Gall and Y. Le Jan, Branching processes in Lévy processes: The

exploration processes, preprint, 1996.

[123] J. F. Le Gall and E. A. Perkins, The exact Hausdorff measure of the support of two-dimensional super-Brownian motion, Ann. Probab., 1995, 23, 1719—1947.

[124] J. F. Le Gall, E. A. Perkins and S. J. Taylor, The packing measure of the support of super-Brownian motion, Stoch. Proc. Appl., 1995, 59, 1, 1—20.

[125] Y. Le Jan, Limites projectives de processus de branchement markoviens, C. R. Acad. Sci. Paris 1989, 309, Série I, 377—381.

[126] Y. Le Jan, Superprocesses and projective limits of branching Markov processes, Ann. Inst. H. Poincaré, 1991, 27, 91—106.

[127] 李存行,超布朗运动的灭绝时的分布,数学年刊,1995, 16A, 5, 667—674.

[128] 李增沪,关于超过程分枝机制的注,数学进展,1990, 19, 117—118.

[129] Li Zenghu(李增沪), A note on the multitype measure branching process, Adv. Appl. Probab., 1992, 24, 496—498.

[130] Li Zenghu(李增沪), Measure-valued branching processes, with immigration, Stoch. Proc. Appl., 1992, 43, 249—264.

[131] Li Zenghu (李增沪), Measure-Valued Branching Processes, Convolution Semigroups and Immigration Processes, Dissertation, Beijing Normal University, 1994.

[132] Li Zenghu (李增沪), Convolution semigroups associated with measure valued branching processes, Chin. Sci. Bull., 1996, 41, 276—280.

[133] Li Zenghu (李增沪), Immigration structures associated with Dawson-Watanabe superprocesses, Stoch. Proc. Appl., 1996, 62, 73—86.

[134] Li Zenghu (李增沪), Immigration processes associated with branching particle systems, to appear in Adv. in Appl. Probab., 1998.

[135] Li Zenghu (李增沪), Measure-valued immigration processes and Kuznetsov processes, preprint, 1996.

[136] Li Zenghu(李增沪), On the absolute continuity of branching Brownian motion with mean field interaction, to appear in Chin. J. Appl. Probab. Statistics, 1998.

[137] Li Zenghu(李增沪), Li Zhanbing(李占柄) and Wang Zikun(王梓坤), Asymptotic behavior of the measure-valued branching process with immigration, Science in China, 1993, 36A, 769—777.

[138] Li Zenghu (李增沪), T. Shiga, Measure-valued branching diffusions: immigrations, excursions and limit theorems, J. Math. Kyoto Univ., 1995, 35, 233—274.

[139] L. Liu and C. Mueller, On the extinction of measure-valued critical branching Brownian motion, Ann. Probab., 1989, 17, 1463—1465.

[140] M. Métivier, Weak convergence of measure-valued processes using Sobolev-imbedding techniques, LNM 1236, 1985, 172—183.

[141] S. Méléard and S. Roelly-Coppoletta, A generalized equation for a continuous measure branching process, LNM 1390, 1990, 171—186.

[142] S. Méléard and S. Roelly, Interacting branching measure processes, in Stochastic Partial Differential equations and Applications(eds. G. Da Prato and L. Tubaro), Pitman RNMS 268, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1992, 246—256.

[143] M. Nagasawa, Schrödinger Equations and Diffusion Theory, Birkhäuser-Verlag, New York, 1993.

[144] M. Nagasawa and T. Sirao, Probabilistic treatment of the blowing up of solutions nonlinear integral equation, Trans. Amer. Math. Soc., 1969, 139, 301—310.

[145] J. Neveu and J. W. Pitman, Renewal property of the extreme and tree property of the excursion of one-dimensional Brownian motion, LNM,1372,1989,240—247.

[146] J. Neveu and J. W. Pitman, The branching process in a Brownian excursion, LNM, 1372,1989,248—257.

[147] 欧庆铃,Ornstein-Uhlenbeck 超过程的若干问题,北京师范大学博士论文,1995.

[148] 欧庆铃,Ornstein-Uhlenbeck 超过程,中国科学,1996,26.11,968—972.

[149] L. Overbeck, Conditioned super-Brownian motion, Probab. Th. Rel. Fields, 1993, 96, 545—570.

[150] L. Overbeck, Pathwise construction of additive H-transforms of super-Brownian motion, Probab. Th. Rel. Fields, 1994, 100, 429—437.

[151] L. Overbeck, M. Röckner, B. Schmuland, An analytic approach to Fleming-Viot processes with interactive selection, Ann. Probab., 1995, 23, 1—36.

[152] C. V. Pao, Nonlinear elliptic boundary-valued problems in unbounded domains, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Appl., 1992, 18. 8, 759—774.

[153] K. R. Parthasarathy, Probability Measures on Metric Spaces, Academic Press, New York, 1967.

[154] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[155] E. A. Perkins, A space-time property of a class of measure-valued branching diffusions, Trans. Amer. Math. Soc., 1988, 305, 743—795.

[156] E. A. Perkins, The Hausdorff measure of the closed support of super-Brownian motion, Ann. Inst. H. Poincaré, 1989, 25, 205—224.

[157] E. A. Perkins, Polar sets and multiple points for super-Brownian motion, Ann. Probab., 1990, 18, 453—491.

[158] E. A. Perkins, On the continuity of measure-valued processes, Seminar on

Stochastic Processes 1990, Birkhäuser, Boston, 1991.

[159] E. A. Perkins, *Conditional Dawson-Watanabe processes and Fleming-Viot processes*, Seminar on Stochastic Processes 1991, Birkäuser, Boston, 1991.

[160] E. A. Perkins, Measure-valued branching diffusions with spatial interactions, Probab. Th. Rel. Fields, 1992, 94, 189—245.

[161] E. A. Perkins, On the martingale problem for interactive measure-valued branching diffusions, Mem. Amer. Math. Soc., 115, 1994.

[162] R. G. Pinsky, Transience, recurrence and local extinction properties of the support for supercritical finite *measure-valued diffusions*, *Ann. Probab.*, *1996*, *24*, *237—267.*

[163] J. W. Pitman and M. Yor, A decomposition of Bessel bridges, Z. Wahr. Verw. Geb., 1982, 59, 425—457.

[164] 钱敏平,随机过程引论,北京大学出版社,1990.

[165] M. Reimers, One dimensional stochastic partial differential equations and the branching measure diffusion, Probab. Th. Rel. Fields, 1989, 81, 319—340.

[166] D. *Revuz and* M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, *Springer-*Verlag, Berlin, 1991.

[167] S. Roelly-Coppoletta, A criterion of convergence of measure-valued processes: application to measure branching processes, Stochastics, 1986, 17, 43—65.

[168] S. Roelly-Coppoletta and A. Rouault, Processus de Dawson-Watanabe conditioné par le futur lointain, C. R. Acad. Sci. Paris, 1989, 309, 867—872.

[169] L. C. G. Rogers and D. Williams, Diffusions, Markov Processes, and Martingales, *Vol 2*: *Itô* Calculus, Chichester, John Wiley & Sons, 1987.

[170] J. Rosen, Renormalization and limit theorems for self-intersections of superprocesses, Ann. Probab., 1992, 20. 3, 1341—1368.

[171] S. M. Ross, Probability Models (fifth eds.), San Diego: Academic Press INC. 1993.

[172] K. Sato, Limit diffusion of some stepping stone models, J. Appl. Probab., 1983, 20, 460—471.

[173] L. Serlet, Some dimension results for super-Brownian motion, Probab. Th. Rel. Fields, 1995, 101, 371—391.

[174] B. A. Sevastyanov, Branching stochastic processes for particles diffusion in restricted domain with absorbing boundaries, Th. Probab. Appl., 1958, 3, 121—136.

[175] M. J. Sharpe, General Theory of Markov Processes, Academic Press INC., San Diego, 1988.

[176] Y. C. Sheu(许元春),A Hausdorff measure classification of G-polar sets for the super-diffusion, Probab. Th Rel. Fields, 1993, 95, 521—533.

[177] Y. C. Sheu(许元春),On positive solutions of some nonlinear differential equations-A probabilistic approach, Stoch. Proc. Appl., 1995, 59.1, 43—54.

[178] T. Shiga, Stepping stone models in population genetics and population dynamics in Stochastic processes in Physics and Engineering, S. Albeverio et al (eds), 1988, 345—355.

[179] T. Shiga, A stochastic equation based on a Poisson system for a class of measure-valued diffusions, J. Math. Kyoto Univ., 1990, 30, 245—279.

[180] A. Shimizu, A measure-valued diffusion process describing an locus model incorporating gene conversion, Nagoya Math. J., 1990, 119, 81—92.

[181] A. N. Shiryayev, Probability, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[182] M. L. Silverstein, Continuous state branching semigroups, Z. Wahr. Verw. Geb., 1969, 14, 96—112.

[183] A. Skorokhod, Studies in the Theory of Random Processes, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1965.

[184] D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan, Multidimensional diffusion Processes, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979.

[185] S. Sugitani, Some properties for the measure-valued branching diffusion processes, J. Math. Soc. Japan, 1987, 41, 437—462.

[186] 唐加山,双曲空间上超布朗运动的一个渐近性质,科学通报,1997, 42.7,685—688.

[187] 唐加山,两类空间形式上的超过程,北京师范大学博士学位论文,1997.

[188] 唐加山,赵学雷,超布朗运动关于区域的首中方式,1997,预印本.

[189] S. D. Taliaferro, Asymptotic behavior of solutions of $y''=\phi(t)y^{\lambda}$. J. Math. Anal. Appl., 1978,66,95—134.

[190] R. Tribe, The connected components of the closed support of super Brownian motion, Probab. Th. Rel. Fields, 1991, 89, 75—87.

[191] R. Tribe, The behavior of superprocesses near extinction, Ann Probab., 1992, 20 (1),286—311.

[192] J. Vaillancourt, Interacting Fleming-Viot processes, Stoch. Proc. Appl., 1990, 36,45—57.

[193] J. Vaillancourt, On the scaling theorem for interacting Fleming-Viot processes, Stoch. Proc. Appl., 1990, 36, 263—267.

[194] J. B. Walsh, An introduction to stochastic partial differential equations, Ecole d'été de Probabilitités de Saint-Flour XIV 1984, LNM 1180,1986.

[195] 王国胜，赵学雷，一类广泛超稳定过程占位时的渐近行为，应用数学学报，1996，19.4，559—565.

[196] 王永进，Ornstein-Uhlenbeck 型马氏过程与超过程的某些性质，南开大学博士论文，1992.

[197] Wang Yongjin(王永进)，Absolute continuity of the occupation time processes with respect to Lebesgue measure for super-Brownian motion，Acta Mathematica Scientia，1994，14(Supp.)，1—7.

[198] 王永进，流动介质下超过程的占位时的状态特征，数学学报，1996，39.5，681—689.

[199] 王永进，超过程条件律的收敛与非灭绝超过程，数学年刊，1996，17A.1，63—70.

[200] Wang Yongjin（王永进），A proof to the persistence criteria for a class of superprocesses，J. Appl. Probab.，1997，34.2，to appear.

[201] 王永进，球面介质作用下的超过程，应用数学学报，待发表.

[202] Wang Yongjin(王永进)，An approach to superprocesses with generalized catalysts，Acta Math. Sci. (New Series)，1998，to appear.

[203] 王永进、吴荣，一类流动介质下测度值分枝过程的平稳态问题，科学通报，1995，40.19，1737—1743.

[204] 王永进、吴荣，超扩散过程在球域上负荷的概率估计，数学年刊，1997，18A.1，25—32.

[205] 王梓坤，布朗运动与位势，科学出版社，1984.

[206] 王梓坤，超过程的幂级数展开，数学物理学报，1990，10(4)，361—364.

[207] 王梓坤，超过程的若干新进展，数学进展，1991，20(3)，311—325.

[208] 王梓坤，赵学雷，交互测度值过程，应用概率统计，1996，12(3)，313—322.

[209] S. Watanabe，A limit theorem of branching processes and continuous state branching processes，J. Math. Kyoto Univ.，1968，8，141—167.

[210] S. Watanabe，Branching diffusions(superdiffusions)and random snakes，preprint，1996.

[211] 吴荣，杨春鹏，S-调和函数与一类非线性偏微分方程，数学学报，1996，39(4)，561—565.

[212] Y. Wu，Asymptotic behavior of the two level measure branching processes，Ann. Probab.，1994，22.2，854—874.

[213] 谢颖超，鞅测度及其极限定理，江苏科学技术出版社，1995.

[214] 严士健、王隽骧、刘秀芳，概率论基础，科学出版社，1982.

[215] 叶俊，有关超过程的若干问题，北京师范大学博士论文，1993.

[216] 叶俊，带迁入超过程的极限性质，科学通报，1993，38.5，405—408.

[217] 叶俊，两物种超过程的构造，数学学报，1995，38.3，362—370.

[218] K. Yosida, Functional Analysis(5th edition),Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1978.

[219] U. Zähle, The fractal character of localizable measure-valued processes III:Fractal carrying sets of branching diffusion, Math. Nachr., 1988, 138, 293—311.

[220] H. Zessin, The method of moments for random measures, Z. Wahr. Verw. Geb., 1982, 62, 395—409.

[221] Zhang Xinsheng (张新生), On comparison theorems for nonlinear evolution equations, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 176, Dekker, New York, 1996, 471—475.

[222] 张新生,超过程的鞅刻化,数学物理学报,1994, 14.2, 223—230.

[223] Zhao Xuelei(赵学雷), Two Kinds of Superprocesses and their Related Theory, Dissertation, Nankai University, 1992.

[224] 赵学雷,超布朗运动的首中概率,数学年刊,1992, 13A(5),519—525.

[225] Zhao Xuelei(赵学雷),Superprocesses:theory and applications, 首届中国博士后学术会议论文集(II),北京国防工业出版社,1993, 1163—1166.

[226] Zhao Xuelei(赵学雷),Some absolute continuities of superdiffusions and super-stable processes, Stoch. Proc. Appl., 1994, 50, 21—35.

[227] Zhao Xuelei(赵学雷), A probabilistic approach to a class of nonlinear Dirichlet's problems with infinite boundary values, J. Beijing Normal University, 1994, 30. 4, 285—289.

[228] Zhao Xuelei (赵学雷), Excessive functions of a class of superprocesses, Acta Mathematica Scientia, 1994,14(4),393—399.

[229] Zhao Xuelei(赵学雷),Functional and path continuity of a class of superprocesses, (Chinese)Journal of Applied Probability and Statistics, 1994, 10.4, 529—537.

[230] Zhao Xuelei(赵学雷),On a class of measure-valued processes with non-constant branching rates, in Dirichlet Forms and Stochastic Processes, (eds. Z. M. Ma, M. Röchner & J. A. Yan),Walter de Gruyter/Berlin, 1995.

[231] Zhao Xuelei(赵学雷),Occupation time processes of Fleming-Viot processes, Chin. Ann. Math., 1995, 16(B).1,51—62.

[232] Zhao Xuelei (赵学雷), Harmonic functions of superprocesses and conditional superprocesses, Science in China, 1996, 39(12A),1268—1279.

[233] Zhao Xuelei (赵学雷),On extinction of a class of superprocesses, Chin. Ann. Math., 1996, 17B.1,115—120.

[234] Zhao Xuelei (赵学雷), Absolute Continuity of the Interacting Measure-Valued Branching Brownian Motion, Chin. Ann. Math., 1997, 18.1, 47—54.

[235] Zhao Xuelei (赵学雷), On the interacting measure-valued branching processes,

Stochastic Differential and Difference Equations (eds. I. Csiszar and Gy. Michaletzky), PSCT 23. Birkhauser/Boston, 1997, 346—352.

[236] 赵学雷,王梓坤,Fleming-Viot 测度值过程,数学进展,1995,24(4),299—308.

[237] 赵学雷,王梓坤,高阶偏微分方程与概率方法,数学进展,1996,25(5),414—421.

[238] Zhao Xuelei(赵学雷)and Yang Min(杨敏), A Limit Theorem for Interacting Measure-Valued Branching Processes, Acta Mathematica Scientia. 1997, 17. 3, 241—249.

[239] Zhao Zhongxin(赵忠信), Green function for Schrödinger operator and conditioned Feynman-Kac gauge, J. Math. Anal. Appl. 1986, 116. 2, 309—334.

[240] Zhao Zhongxin(赵忠信), Green function and conditioned gauge theorem for a 2-dimensional domain, Seminar of Stochastic Processes, 1990, 283—294.

名词索引

（以汉语拼音或英文的字母为序）

J

K

L

M

O

P

Q

R

S

T

W

常用记号表

$[a]$,表示不超过 a 的最大整数.

$\overset{D}{=}$,分布相等.

$\overset{w}{\to}$,表示测度的弱收敛.

$\overset{a.s.}{\to}$,几乎处处收敛.

$\overset{P}{\to}$,以概率收敛.

$\overset{L^p}{\to}$,以 p-范数收敛.

$\sim$,表示同阶无穷大或无穷小.

$*$,表示卷积运算.

$\langle\mu,f\rangle = \mu(f) := \int_E f(x)\mu(dx), f \in b\mathscr{B}(E), \mu \in M(E).$

$\|f\|$,函数 f 的最大值范数.

$\|f\|_p$,函数 f 的 L^p 范数.

$\phi_p(x) = \frac{1}{(1+|x|)^p}, p > 0.$

π_k,从全空间到 k 个分量的投影映射.

τ_w,弱收敛拓扑.

τ_v,淡收敛拓扑.

τ_p,p-缓增拓扑.

τ_p,缓增测度空间的拓扑.

$\triangle$,Laplace 算子或过程的爆发状态.

$\triangle_\alpha = -(-\triangle)^{\alpha/2}$,$\alpha$-阶对称稳定过程的无穷小算子.

$\varrho M(\cdot,\cdot)$,Prohorov 距离.

$\varrho^\alpha(\xi)$,过程 ξ 的 α-过分函数.

ζ,过程的生命时.

∞_∂,∞,一点紧化的孤立点.

1_A,集合 A 的示性函数.

A^c,集合 A 的余集.

$B(x,r) := \{y \in E; d(x,y) < r\}$.

$B^*(S)$,S 上极大值范数不大于1的函数全体.

$\bar{B}$ 或 cl(B)，集合 B 的闭包.

$b\mathscr{B}(E)$，有界 $\mathscr{E}$-可测函数全体.

$pb\mathscr{B}(E)$，非负有界 $\mathscr{E}$-可测函数全体.

$C(E)$，E 上连续函数全体.

$bC(E)$，E 上有界连续函数全体.

$bpC(E)$，E 上非负有界连续函数全体.

$C_0(E)$，E 上在无穷远点为零的连续函数全体.

$C_c(E)$，E 上紧支集连续函数全体.

$pC_c(E)$，E 上非负紧支集连续函数全体.

$pC_p(\mathbb{R}^d)$，$\mathbb{R}^d$ 上非负有界连续函数 ϕ，且 $|x|^p\phi(x)$ 有界.

$D(\mathbb{R}_+,E)$，$\mathbb{R}$ 到 E 全体映射(轨道空间).

$d_w(\cdot,\cdot)$，对应弱收敛拓扑的距离.

diam(B)，集合 B 的直径.

$\mathscr{D}_t^0$：t 前 sigama-代数.

(E,d)，一般距离空间.

$\mathscr{E}_c$，$\mathscr{E}$ 中所有紧支集可测函数的全体.

$b\mathscr{E}(pb\mathscr{E})$，全体有界(非负有界)$\mathscr{E}$-可测函数.

J_1，Skorokhod 拓扑.

$L_t^a(\omega)$，过程 ω 在 a 点的局部时.

$M(E)$，E 上 Radon 测度的全体.

$M_1(E)$，E 上概率测度的全体.

$M_{\leq 1}(E)$，E 上次概率测度的全体.

$M_F(E)$，E 上的有限测度空间.

$M_{LF}(E)$，在 E 的有界集上有限的测度空间.

$M_p(\mathbb{R}^d)=\{\mu\in M(\mathbb{R}^d);\int_{\mathbb{R}^d}\phi_p\mu(dx)<\infty\}$.

$M(D)$，表示 D 上的有限 Radon 测度的全体.

$\mathbb{N}$，全体自然数.

P_x，一般随机过程的概率.

P^μ，$P^{r,\mu}$，测度值过程的概率.

$\mathscr{P}(\mu)$，强度为 μ 的 Poisson 点过程.

Q_t，表示 $Q\subset[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的投影.

$\bar{R}^d$，R^d 的一点紧化.

$S_\cdot$，底过程的算子半群.

$S(\alpha,d,\beta)$，(α,d,β)-超过程.

supp(f)，supp(μ)，函数 f 或测度 μ 的支撑集.

Vol(B)，集 B 的体积.